Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

SOLUZIONI TUTORATO 2
6 OTTOBRE 2011

1. Dimostrare che data q forma quadratica associata a b forma bilineare simmetrica, essa verifica le seguenti condizioni:
   a) $q(k\overline{v}) = k^2 q(\overline{v})$
   b) $2b(\overline{v}, \overline{w}) = q(\overline{v} + \overline{w}) - q(\overline{v}) - q(\overline{w})$

   <u>*Soluzioni*</u>

   a) Per definizione si ha $q(\overline{v}) = b(\overline{v}, \overline{v})$ e per la terza propriet$\tilde{\text{A}}$ delle forme bilineari: $b(k\overline{v}, \overline{v}) = kb(\overline{v}, \overline{v})$, si ha che $q(k\overline{v}) = b(k\overline{v}, k\overline{v}) = k^2 b(\overline{v}, \overline{v}) = k^2 q(\overline{v})$
   b) $q(\overline{v}+\overline{w}) - q(\overline{v}) - q(\overline{w}) = b(\overline{v}+\overline{w}, \overline{v}+\overline{w}) - b(\overline{v}, \overline{v}) - b(\overline{w}, \overline{w}) = b(\overline{v}, \overline{w}) + b(\overline{w}, \overline{v}) = 2b(\overline{v}, \overline{w})$

2. Diagonalizzare le seguenti forme quadratiche e determinarne la segnatura:
   a) $q(x, y, z) = xz + xy + yz$
   b) $q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$
   c) $q(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + 2xz + z^2$

   <u>*soluzioni*</u>

   a) Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   Adesso scegliamo un vettore non isotropo; poiché $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ sono vettori isotropi allora sicuramente la loro somma é un vettore non isotropo, quindi poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ e calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 0$$

   Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0$$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^\perp$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, -1)$ e controlliamo che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} =^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordinate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$$

Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p, q) = (1, 2)$.

b) Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ perché, come possiamo vedere dalla matrice $\mathbf{A}$, tale vettore non é isotropo. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x - 2y = 0$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (-2, 1, 0)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7y = 0$$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ 7y = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1)$ che, come possiamo vedere dalla matrice **A** non é isotropo.

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} = ^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordianate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 7y^2 + 2z^2$$

.

Osservando la matrice **D** vediamo che la segnatura di Q é $(p, q) = (3, 0)$.

c) Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ perché, come possiamo vedere dalla matrice **A**, tale vettore non é isotropo. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y + z = 0$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + z = 0$$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (2, 1, -1)$ e verifichiamo che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} =^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordianate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2z^2$$

.

Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p, q) = (2, 1)$.

3. Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo $(V, <, >)$ sussistono le seguenti identitá $\forall v, w \in V$

   a) $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$

   b) $||v + w||^2 - ||v - w||^2 = 4 < v, w >$

   Soluzioni:

   a) $||v+w||^2 + ||v-w||^2 =< v+w, v+w > + < v-w, v-w >=< v, v > +2 < v, w > + < w, w > + < v, v > -2 < v, w > + < w, w >= 2||v||^2 + 2||w||^2$

   b) $||v+w||^2 - ||v-w||^2 =< v+w, v+w > - < v-w, v-w >=< v, v > +2 < v, w > + < w, w > - < v, v > +2 < v, w > - < w, w >= 4 < v, w >$

4. Dato il polinomio:

$$P = x^2 - 2y^2 + xy - xz \in \mathbb{Z}_3[x, y, z]$$

Sia $V = (\mathbb{Z}_3)^3$ e si fissi in V la base $\mathbb{E}$=$\{e_1, e_2, e_3\}$

a) Scrivere la matrice A della forma quadratica q associata al polinomio P e determinarne il rango.

b) Diagonalizzare q e indicarne l'espressione in una base q-diagonalizzante.

<u>*Soluzioni*</u>:

a) La matrice associata al polinomio P é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che é ottenuta tenendo conto che la matrice di una forma quadratica é in generale di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1/2xy & 1/2xz \\ 1/2yx & y^2 & 1/2yz \\ 1/2zx & 1/2zy & z^2 \end{pmatrix}$$

In cui con x, y, z si intendono i coefficienti dei monomi che compaiono nella forma quadratica. Il rango della matrice é 3 in quanto il determinante é diverso da 0.

b) Per diagonalizzare la forma q procedo nel seguente modo:

- Prendo come primo vettore $v_1 = (1, 0, 0)$ che verifica $q(v_1) = 1$ (quindi non é isotropo)
- Trovo il sottospazio ortogonale a v_1:

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui ottengo: $x + 2y + z = 0$ e dunque il sottospazio é:

$$< \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

- Considero uno dei due vettori e verifico che non sia isotropo per sceglierlo come secondo vettore della base diagonalizzante. Scelgo $v_2 = (-1, 0, 1)$ che verifca $q(v_2) = -1$

- Trovo come prima il sottospazio ortogonale a v_2 e lo interseco con lo spazio ortogonale a v_1:

$$(-1,0,1)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da cui ottengo $z = -2y$ e quindi:

$$\begin{cases} x = -2y - z \\ z = -2y \end{cases}$$

Il sottospazio é dunque:

$$< \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} >$$

Quindi $v_3 = (0,-2,-1)$ il quale verifica $q(v_3) = 1$

- La matrice diagonalizzata é quindi:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

L'espressione di q nella nuova base é $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$.

5. Si determini la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita dalle seguenti condizioni:

   a) $b(e_1,e_1) = b(e_2,e_2) = b(e_3,e_3) = 1$

   b) I vettori $e_1 + e_2,\ e_1 + e_3,\ e_2 + e_3$ sono isotropi.

   Scrivere la matrice A associata alla forma bilineare b e diagonalizzarla. Scrivere la forma quadratica associata e determinarne la segnatura.
   <u>*Soluzione*</u> :
   La prima condizione ci dá il valore di $b(e_i,e_i)$ *con* $i = 1,2,3$.
   La seconda condizione va invece esplicitata:
   $0 = b(e_1 + e_2, e_1 + e_2)$
   $0 = b(e_1,e_1) + b(e_1,e_2) + b(e_2,e_1) + b(e_2,e_2)$
   $0 = 1 + 2b(e_1,e_2) + 1$
   $b(e_1,e_2) = -1$
   Si procede allo stesso modo per $b(e_1+e_3, e_1+e_3) = 0$ e $b(e_2+e_3, e_2+e_3) = 0$. Da cui otteniamo $b(e_1,e_3) = -1$ e $b(e_2,e_3) = -1$. La matrice associata é:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Per diagonalizzarla si procede come nell'esercizio precedente con una piccola variazione: per primo vettore scelgo e_1 e poiché il suo spazio ortogonale é generato da vettori isotropi si considera come secondo vettore la somma dei sue che dÃ luogo ad un vettore non isotropo. La matrice diagonalizzata é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. Il fatto che l'ultimo vettore della base diagonalizzante sia isotropo é corretto in quanto la matrice di partenza ha determinante uguale a zero e quindi anche la sua diagonalizzazione deve avere questa sua caratteristica. La forma quadratica associata é $x^2 - 4y^2$ e ha segnatura (p,q)=(1,1)

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Calcolare la matrice $B = {}^tA(A)$
   b) Scrivere la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice B
   c) Si consideri il vettore $v_\lambda = (1-\lambda, 2-\lambda, \lambda)$ e il sottospazio F_λ dei vettori x t.c.$b(v_\lambda, x) = 0$ al variare dei parametri reali λ, si calcoli la dimensione dell'intersezione $F_\lambda \cap W$ dove W é il sottospazio avente come base i vettori $w_1 = (1,-1,0)$ $w_2 = (0,0,1)$

<u>*Soluzione*</u> :

   a) $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Quindi si ha $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
   b) Sia $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un generico vettore di $\mathbb{R}^3$,
   $b = {}^t\overline{x}B\overline{x} = 5x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_1 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$
   c) Un vettore $z = t_1w_1 + t_2w_2$ appartenente a W, $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$ appartiene a $F_\lambda \cap W$ se e solo se t_1, t_2 soddisfano la seguente equazione:

   $$b(v_\lambda, z) = b(v_\lambda, t_1w_1 + t_2w_2) = t_1b(w_1, v_\lambda) + t_2b(w_2, v_\lambda) = 0$$

   I coefficienti di questa equazione variano al variare di λ. Se i due coefficienti non sono entrambi zero allora le soluzioni della equazione sono ∞^1 e quindi $dimF_\lambda \cap W = 1$. Ció avviene per $\lambda \neq 1$. Per $\lambda = 1$ entrambi i coefficienti sono nulli e quini $F_1 = W$ e la dimensione é due.

7. Verificare che ponendo
   $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$
   si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt,

si ortogonalizzi la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto a questo prodotto scalare.
Soluzione:
Scriviamo la matrice che rappresenta questa forma bilineare $\langle , \rangle$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che un prodotto scalare é una forma bilineare simmetrica definita positiva, guardando la matrice vadiamo che la forma bilineare assegnata é simmetrica; per vedere se é definita positiva procediamo con il metodo dei minori principali:
Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ é definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1, D_2, ..., D_n$ sono positivi,
dove $D_i = det(A(1, ..., i|1, ..., i))$
Quindi nel nostro caso: $D_1 = 1 > 0$; $D_2 = 2 > 0$; $D_3 = 1 > 0$; $D_4 = 1 > 0$. Quindi $\langle , \rangle$ é un prodotto scalare.
Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_2} - \frac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0, 1, 0, 0) + 2(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 0, 0)$

$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{e_3} - \frac{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle} \overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0, 0, 1, 0) + \frac{1}{2}(2, 1, 0, 0) = (1, \frac{1}{2}, 1, 0)$

$\overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{e_4} - \frac{\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3} \rangle} \overrightarrow{v_3} - \frac{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle} \overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0, 0, 0, 1)$

Quindi ortogonalizzando la base canonica di $\mathbb{R}^4$ si ottiene la seguente base:
$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\} = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (1, \frac{1}{2}, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

8. Trovare una base ortonormale del sottospazio $V = \{(x, y, z)|x + y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$. Completare poi la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Soluzione:
Il sistema che definisce V ha come soluzioni i vettori $(x, y, x + y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrari. Quindi, $dimV = 2$ e una base di V é $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, cioé $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$.

Sia $\langle \, , \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortogonale del sottospazio V rispetto a $\langle \, , \rangle$.

Poniamo $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$. Allora:
Dunque ho che la segnatura é: (p,q)=(2,1)
$w_1 = v_1 = (1, 0, 1)$;

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

La base ortonormale cercata sará allora:

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\right\} = \left\{\frac{w_1}{\sqrt{2}}, \frac{w_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

Per completare la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo trovare un vettore w_3 tale che:

1) $w_3 \in \{w_1, w_2\}^\perp$
2) $\|w_3\| = 1$
3) $\langle w_1, w_2, w_3\rangle = \mathbb{R}^3$

In realtá sará sufficiente trovare un vettore soddisfacente 1) e 2). La 3) sará automaticamente verificata poiché in tal caso w_1, w_2, w_3 costituiscono un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali e pertanto risultano lineramente indipendenti.

Sia $w_3 = (x, y, z)$

$w_3 \in \{w_1, w_2\}^\perp \Rightarrow w_3 \in w_1^\perp \cap w_2^\perp \Rightarrow$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle w_3, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ \langle w_3, w_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Il vettore $\overrightarrow{x} = (1, 1, -1)$ verifica il sistema precedente e pertanto é ortogonale contemporaneamente a w_1 e w_2.
Allora $w_3 = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ verifica 1), 2) e 3) e pertanto $\{w_1, w_2, w_3\}$ é una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.