Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

SOLUZIONI TUTORATO 3
13 OTTOBRE 2011

1. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

   a) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t+1,\ t+t^2,\ 2-t-t^3,\ t^3$$

   b) Dato il sottospazio $U = \langle t^3 - 1, t+2 \rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

Soluzione :

   a) Per vedere se i polinomi $t+1$, $t+t^2$, $2-t-t^3$, t^3 sono una base di V verifico che sono linearmente indipendenti e da questo e dal fatto che sono quattro deduco che sono una base.

$$a(t+1) + b(t+t^2) + c(2-t-t^3) + dt^3 = 0$$

$at + a + bt + bt^2 + 2c - ct - ct^3 + dt^3 = 0$
$a + 2c + t(a+b-c) + t^2b + t^3(d-c) = 0$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ b = 0 \\ d - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ora applico il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt utilizzando il prodotto scalare definito nella traccia. Siano ora $v_1 = t+1 \quad v_2 = t+t^2 \quad v_3 = 2-t-t^3 \quad v_4 = t^3$

$w_1 = t+1$

$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>}w_1 = t + t^2 - \frac{1}{2}(t+1) = \frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}$

$w_3 = v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{<w_1,w_1>}w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{<w_2,w_2>}w_2 = 2 - t - t^3 - \frac{1}{2}(1+t) + (\frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}) = 1 - t + t^2 - t^3$

$w_4 = v_4 - \frac{<v_4,w_1>}{<w_1,w_1>}w_1 - \frac{<v_4,w_2>}{<w_2,w_2>}w_2 - \frac{<v_4,w_3>}{<w_3,w_3>}w_3 = \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$

Infine normalizziamo i vettori e otteniamo:

$\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}$

$\underline{w}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}t^2}{\sqrt{3}}$

$\underline{w}_3 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}$

$\underline{w}_4 = \frac{3t^3}{2\sqrt{3}} + \frac{t^2}{2\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) Per calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^{\perp}$ procedo nel seguente modo: Ricordiamo che un vettore v appartiene a $U^{\perp}$ se $< v, t^3 - 1 >= 0$ e se $< v, t+2 >= 0$, quindi preso un generico vettore di V:

$$\begin{cases} < t^3 - 1, x + yt + zt^2 + wt^3 >= 0 \\ < t+2, x + yt + zt^2 + wt^3 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Il sistema di equazioni appena trovato è costituito dalle equazioni cartesiane di$U^{\perp}$
Mentre queste sono le equazioni parametriche(possiamo anche scrivere se $v \in U^{\perp}$ allora $v = u - 2ut + zt^2 + ut^3$)

$$\begin{cases} x = u \\ w = u \\ y = -2u \end{cases}$$

Per scrivere una base ortonormale per U e $U^{\perp}$ utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt:
$w_1 = t^3 - 1$
$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 = t + 2 + (t^3 - 1) = t^3 + t + 1$
Ora divido ognuno per la propria norma per ortonormalizzarli.
$w_1 = \frac{t^3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{7}} - \frac{3\sqrt{2}t^3}{\sqrt{7}}$
Invece per $U^{\perp}$ ho che :
$U^{\perp} = < 1 - 2t + t^3, t^2 >$
Poniamo $v_1 = 1 - 2t + t^3$ mentre $v_2 = t^2$ e notiamo che sono già ortognali quindi bisogna solo normalizzarli:
$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}}t + \frac{t^3}{\sqrt{6}}$
$w_2 = t^2$

2. Sia $\langle\, , \rangle$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ che ha, come matrice associata, rispetto alla base canonica, la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ costruire una base ortogonale per $\langle\, , \rangle$.
(Prova di esonero del 10-11-2008)

Soluzioni: Dati $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle\, , \rangle$ è definito nel modo seguente:

$$\langle\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\, \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$ si ottiene:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_2} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0, 1, 0) - 1(1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{e_3} - \frac{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle}\overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle}\overrightarrow{v_1} = (0,0,1) - 1(-1,1,0) - 1(1,0,0) = (0,-1,1)$$

Quindi $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base ortogonale per $\langle , \rangle$.

3. Si determini una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, applicando il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $\overline{v_1} = (1,0,1), \overline{v_2} = (0,1,1), \overline{v_3} = (0,1,-1)$.
   Si verifichi che la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica e é una matrice ortogonale.
   (Prova di esonero del 5-11-2007)

   Soluzioni:

   Dati $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, ricordiamo che il prodotto scalare standard è così definito:

   $$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

   Applicando allora il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \overrightarrow{v_2} = (0,1,1), \overrightarrow{v_3} = (0,1,-1)$ si ottiene:

   $$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$$

   $$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1} \rangle}\overrightarrow{w_1} = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

   $$\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3} - \frac{\langle \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_2} \rangle}\overrightarrow{w_2} - \frac{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1} \rangle}\overrightarrow{w_1} = (0,1,-1) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1,0,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$$

   $w = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ è una base ortogonale per $\langle \rangle$. Allora normalizzando ciascun vettore della base w si ottiene la base ortonormale f cercata, costituita dai vettori:

   $$\overrightarrow{f_1} = \frac{\overrightarrow{w_1}}{\|\overrightarrow{w_1}\|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$
   $$\overrightarrow{f_2} = \frac{\overrightarrow{w_2}}{\|\overrightarrow{w_2}\|} = (-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}})$$
   $$\overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{w_3}}{\|\overrightarrow{w_3}\|} = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

   Sia ora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di coordinate dalla base f alla base canonica. Allora poichè A verifica la relazione $\mathbf{A^t A} = \mathbf{Id}$, A è una matrice ortogonale.

4. Dimostrare che se $char K \neq 2$ ogni forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to K$ che sia non nulla ha un vettore non isotropo.

   Soluzioni:

   Poichè F è non nulla $\exists\,(\overline{x}, \overline{y}) \in V \times V$ tale che $F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$.

   $$F(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}) = F(\overline{x}, \overline{x}) + F(\overline{y}, \overline{y}) + 2F(\overline{x}, \overline{y}).$$

Notiamo che, poichè $charK \neq 2$, $2F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$, essendo $F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$.

Abbiamo allora 3 opportunità:
1) $\overline{x}$ è non isotropo;
2) $\overline{y}$ è non isotropo;
3) nel caso in cui sia $\overline{x}$ che $\overline{y}$ siano isotropi si ha $F(\overline{x}+\overline{y}, \overline{x}+\overline{y}) = 2F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ cioè $\overline{x}+\overline{y}$ è non isotropo.

In ogni caso esiste un vettore non isotropo.

5. Stabilire se le seguenti forme quadratiche sono definite positive, negative o semidefinite positive, negative:
   a) $x^2 - y^2 - 2z^2 + \frac{1}{2}xy$
   b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + yz$
   c) $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + xy + \frac{1}{2}yz$

   Soluzione: Per verificare se le forme quadratiche sono definite positive, negative o semidefinite positive, negative, utilizziamo il metodo dei minori principali:
   - Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1, D_2, \cdots, D_n$ sono positivi.
   - Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é definita negativa se e solo se

   $$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \cdots$$

   a) La matrice che rappresenta la forma quadratica é $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
   si ha che $D_1 > 0, D_2 < 0, D_3 > 0$, Quindi é una forma simmetrica indefintita.
   b) La matrice che rappresenta la forma quadratica é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
   Si ha che $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 < 0$, Quindi é una forma simmetrica indefinita.
   c) La matrice che rappresenta la forma quadratica é $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix}$
   si ha che $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$, Quindi é una forma simmetrica definta positiva.

6. Sia Q la forma quadratica rappresentata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ da $Q(x) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2$.
   a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica b associata a q.
   b) Verificare che il vettore $x = (-1, 3, 2)$ non é b-isotropo
   c) Determinare 2 vettori $y'ey'' \in \mathbb{R}^3$ tali che $y' + y'' = e_2$ con $y'||x$ e $y'' \perp x$.

   Soluzione
   a) Per trovare a matrice che rappresenta la forma bilineare simmetrica b associata a Q utilizziamo la proposizione:

   $$2b(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

dimostrata nel precedente tutorato. Otteniamo quindi che la matrice é:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(-1,3,2)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (4,5,7)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 25 \neq 0$

c) $y' = k(-1,3,2)$
Per trovare y'' procedo nel seguente modo:

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2b-c, 2a+b+2c, -a+2b)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$4a+5b+7c=0$$

Infine utilizzo la condizione $y' + y'' = e_2$

$$\begin{cases} 4a+5b+7c=0 \\ -k+a=0 \\ 3k+b=1 \\ 2k+c=0 \end{cases} \begin{cases} a=1/5 \\ b=2/5 \\ c=-2/5 \\ k=1/5 \end{cases}$$

I due vettori cercati sono quindi:
$y' = (\frac{-1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$
$y'' = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-2}{5}$

7. Sia f un'affinità di $\mathbb{A}$. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in \mathbb{A}$ allora f fissa tutti i punti della retta r passante per P e Q.
Soluzione:
Sia R un punto qualsiasi della retta r. Vogliamo dimostrare che $f(R) = R$.
Notiamo che, essendo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ vettori paralleli, si avrà $\overrightarrow{PR} = c\overrightarrow{PQ}$ con $c \in K$.
Sappiamo inoltre per ipotesi che $f(P) = P$ e $f(Q) = Q$.
Allora dalla definizione di affinità (un'affinità è una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che esista un isomorfismo $\varphi : V \to V$ tale che $\forall P, Q \in \mathbb{A}\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$) si avrà:

$\overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(c\overrightarrow{PQ}) = c\varphi(\overrightarrow{PQ}) = c\overrightarrow{f(P)f(Q)} = c\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{PR}$

Ne segue che $f(R) = R$. Infatti essendo $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, $\forall\, P \in \mathbb{A}$, $\forall\, v \in V\ \exists!\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$

8. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento Oe_1e_2.

   a) Determinare l'equazione di ogni affinitá f di $\mathbb{A}$ che fissa i punti della retta r di equazione $x + y = 1$.

b) Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in \mathbb{A}$, tra le affinitá considerate in (a) determinare quelle (eventuali) che trasformano P in Q.

c) Tra le affinitá considerate in (a) determinare eventuali traslazioni.

<u>Soluzione</u>:

a) L'equazione generale di un'affinità in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (questa è la condizione affinchè l'operatore φ associato a f, rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sia un automorfismo)

Sappiamo che un'affinità f fissa tutti i punti di una retta $r \Leftrightarrow f$ fissa due punti distinti di r.
Nel nostro caso r ha equazione $x + y = 1$. Pertanto, scelti ad esempio in r i punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (0, 1)$, le affinità richieste sono tutte e sole quelle che fissano P_1 e P_2.
Imponiamo allora che $f(P_1) = P_1$ e $f(P_2) = P_2$:

$$f(P_1) = P_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + e = 1 \\ c + f = 0 \end{cases}$$

$$f(P_2) = P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b + e = 1 \\ d + f = 0 \end{cases}$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di 4 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} a + e = 1 \\ c + f = 0 \\ b + e = 0 \\ d + f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 - a \\ c = -f \\ b = -e \\ f = 1 - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 - a \\ c = d - 1 \\ b = a - 1 \\ f = 1 - d \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema è in funzione di due parametri (a e d). Le affinità richieste hanno dunque equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a - 1 \\ d - 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a \\ 1 - d \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & a - 1 \\ d - 1 & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow ad - (a - 1)(d - 1) = a + d - 1 \neq 0 \Rightarrow a + d \neq 1$

b) Imponiamo l'ulteriore condizione $f(P) = Q$:

$$\begin{pmatrix} a & a - 1 \\ d - 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a \\ 1 - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2a - 2 \\ d - 1 + 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a \\ 1 - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 2 \\ +2d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'unica affinità del tipo richiesto è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Un'affinità è una traslazione se e solo se il suo isomorfismo associato φ è l'identità. Pertanto, nel nostro caso, risulta:

$$f \text{ è una traslazione} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = d = 1.$$

Ne segue che l'unica traslazione del tipo richiesto è l'identità in quanto per $a = d = 1$ si ottiene $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$