Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

Soluzioni Tutorato 4
20 Ottobre 2011

1. Trovare per quali valori di h la seguente matrice è definità positiva e per quali valori è definita negativa:
$$\begin{pmatrix} h & 2 & h \\ 2 & h & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*Soluzioni* :</u>

a) Cerchiamo per quali h la matrice é definita positiva applicando il teorema dei minori principali:
Ho il seguente sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} h > 0 \\ h^2 - 4 > 0 \\ -h^3 + h^2 - 4 > 0 \end{cases}$$
Che si riduce al sistema:
$$\begin{cases} h > 2 \\ -h^3 + h^2 - 4 > 0 \end{cases}$$
Ora poiché non si riescono a trovare facilmente le soluzioni della seconda disequazione studiamo la funzione $f(h) = -h^3 + h^2 - 4$ per vedere dove é positiva.
Notiamo che $f'(h) = -3h^2 + 2h = 0$ si ha per $h_1 = 0$ e $h_2 = 2/3$.
Vediamo che h_1 é un minimo mentre h_2 é un massimo, $f(h_1) = -4$ e $f(h_2) = -108/27$.
Inoltre $lim_{h\to+\infty} f(h) = -\infty$, quindi la $f(h)$ é sempre negativa a destra di zero(ha derivata negativa quindi decresce inoltre per il valore limite é sempre negativa) e non soddisfa mai il sistema.
In conclusione la matrice non é mai definita positiva .

b) Cerchiamo invece per quali h la matrice é definita negativa:
$$\begin{cases} h < 0 \\ h^2 - 4 > 0 \\ -h^3 + h^2 - 4 < 0 \end{cases}$$
Come prima, ma con una piccola differenza, il sistema si riduce a :
$$\begin{cases} h < -2 \\ -h^3 + h^2 - 4 < 0 \end{cases}$$
Avendo già studiato la funzione $f(h) = -h^3 + h^2 - 4$ sappiamo che:

- h_1 é un minimo e la funzione vale -4 in questo punto
- $lim_{h\to-\infty} f(h) = +\infty$

Quindi la f per il teorema del valor medio assumerà valore zero per $h = h_3$.

La f sará positiva a destra di h_3 ed inoltre vediamo che $h_3 > -2$ in quanto $f(-2) > 0$ quindi il sistema non è mai risolto perchè $f(h) = -h^3 + h^2 - 4$ è sempre positiva e mai negativa per $h < -2$.
La forma non è mai definita negativa.

2. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice associata rispetto alla base canonica $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

a) Si trovino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui b è non degenere e quelli per cui è un prodotto scalare.

b) Per $h = -1$ si stabilisca se può esistere una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a b, contenente il vettore $4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$.

c) Per $h = 0$ si stabilisca se può esistere una base $f = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, ortogonale rispetto a b e tale che

$$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = 0, \qquad b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1, \qquad b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 2.$$

(Appello A del 18 febbraio 2010)

Soluzioni :

a) Sia $A = \begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Affinché A sia non degenere dobbiamo imporre che essa abbia rango massimo ovvero $\det(A) \neq 0$: $\det(A) = -4h \Rightarrow A$ é non degenere $\Leftrightarrow h \neq 0$.

Sappiamo che una forma bilineare simmetrica é definita positiva, ossia é un prodotto scalare, $\Leftrightarrow A$ é definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di A sono positivi. Pertanto dobbiamo imporre:

$$D_1 = h > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} h & -1 \\ -1 & h \end{vmatrix} = h^2 - 1 > 0 \ , \quad D_3 = \begin{vmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4h > 0$$

da cui si otterrebbe il sistema: $\begin{cases} h > 0 \\ h < -1 \vee h > 1 \\ h < 0 \end{cases}$ che chiaramente non é soddisfatto per alcun valore di h.
Ne segue che, per qualsiasi scelta di h, b non é mai un prodotto scalare.

b) Notiamo innanzitutto che, per i risultati ottenuti nel punto precedente, imponendo $h = -1$ b é non degenere, ossia ha rango $r(b) = 3$.
Osserviamo inoltre che $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} = (4, 0, 1)$ é un vettore isotropo. Infatti:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Questo implica che $\overline{u}$ non puó essere contenuto in una base diagonalizzante per b. Infatti se per assurdo lo fosse si avrebbe che b in tale base é rappresentata da una matrice diagonale B avente almeno uno 0 sulla diagonale. Ma una siffatta matrice B ha determinante nullo, cioé $r(B) < 3$, il che implicherebbe che $r(b) < 3$ ($= b$ é degenere): si arriverebbe cosí a un assurdo in quanto il rango di una forma bilineare non dipende dalla particolare base scelta e dall'osservazione iniziale nel nostro caso si ha $r(b) = 3$.

c) Innanzitutto per $h = 0$, la matrice associata a b rispetto alla base canonica é:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In tal caso, inoltre, per quanto visto nel punto (a), b é degenere e in particolare $r = r(b) = 2$.

Ricordiamo che anche la segnatura di una forma bilineare é indipendente dalla base scelta.
Se esistesse quindi una base f tale da soddisfare le ipotesi richieste, b avrebbe segnatura $(p, q = n - r) = (2, 0)$.
Consideriamo il vettore $\overrightarrow{w} = (1, 1, 0)$. Osserviamo che:

$$b(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

Potremmo quindi procedere con il solito metodo induttivo per diagonalizzare la matrice ponendo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w}$ e portando a termine il processo di diagonalizzazione avremmo una matrice del tipo:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \neq 0$$

(*Nota*: Sappiamo che uno e uno solo degli elementi sulla diagonale é nullo perché, essendo il rango indipendente dalla base scelta, la matrice D deve avere rango 2).
Questo contraddirebbe l'ipotesi che la segnatura della matrice sia $(2, 0)$.

E' quindi impossibile trovare una base, per $h = 0$, tale che le condizioni richieste siano soddisfatte.

3. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Dimostrare, utilizzando il teorema di Sylvester, che risulta:

$$b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

[cioè b è definita positiva o definita negativa].

<u>*Soluzioni :*</u>
In base al teorema di Sylvester, esiste una base $\mathbb{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ in cui la forma bilineare b assume la forma:

$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

con $p \leq r \leq n$. [La coppia $(p, r-p)$ é la segnatura di b].
Risulta subito che $r = n$, altrimenti $b(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n}) = 0$ e quindi $\overrightarrow{e_n} \in I_b(\mathbb{R}^n)$, contraddicendo l'ipotesi che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
Per concludere basta verificare che $p = n$ oppure che $p = 0$: infatti nel primo caso risulterá che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mentre nel secondo caso si avrá che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Supponiamo per assurdo che $1 \leq p < n$ e consideriamo l'equazione:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$$

equivalente alla seguente:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

Se esiste un vettore non nullo $\overrightarrow{x}$ verificante tale equazione, allora $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, cioé $\overrightarrow{x} \in I_b(\mathbb{R}^n)$ e si avrá dunque un assurdo.

Se $p \geq n - p$, basterá scegliere il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_{n-p} = x_{p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle;

se invece $p < n - p$, scegliamo il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_p = x_{n-p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle.

I vettori considerati verificano l'equazione precedente e forniscono quindi un assurdo.

4. Sia $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita rispetto alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$:

$$a(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \qquad a(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$$
$$a(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \qquad a(\overrightarrow{e_4}) = 2\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$$

Verificare che a è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ (*Nota*: dato uno spazio vettoriale euclideo V con prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle$, un operatore $T \in \mathrm{End}V$ si dice *simmetrico* se $\langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y}) \rangle$, $\forall \, \overrightarrow{x}, \, \overrightarrow{y} \in V$).
Soluzioni :
Sia A la matrice che rappresenta l'operatore lineare $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nella base canonica. Si ha:

$$\begin{cases} a(\overrightarrow{e_1}) = (1, 2, 0, 0) \\ a(\overrightarrow{e_2}) = (2, 5, 0, 0) \\ a(\overrightarrow{e_3}) = (0, 0, 4, 2) \\ a(\overrightarrow{e_4}) = (0, 0, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia C la matrice che rappresenta il prodotto scalare standard nella base canonica di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a é simmetrico (o autoaggiunto) $\Longleftrightarrow \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, a(\overrightarrow{y})\rangle \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t(a(\overrightarrow{x}))\, I\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, I\, a(\overrightarrow{y}) \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, I\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, I\, A \overrightarrow{y} \,\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tA\, I = I\, A \Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A$ é simmetrica.

La matrice A é simmetrica e pertanto l'operatore a é simmetrico.

5. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ uno spazio affine con riferimento $Oe_1e_2e_3$. Sia $f = (f, \varphi)$ l'affinità di $\mathbb{A}$ definita dalle seguenti condizioni:

   $f(P) = P'$, con $P = (1, 2, 0)$ e $P' = (2, -1, 1)$
   $f(Q) = Q'$, con $Q = (1, 3, 1)$ e $Q' = (3, -1, 0)$
   $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}; \qquad \varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}.$

   a) Determinare le equazioni di f.
   b) Determinare i punti fissi di$f$.

   <u>*Soluzioni :*</u>

   a) L'equazione generale di un'affinitá in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ é:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (questa é la condizione affinché l'operatore φ associato a f, rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sia un automorfismo)

Dall'esercizio precedente sappiamo che un'affinitá f fissa tutti i punti di una retta r $\Leftrightarrow f$ fissa due punti distinti di r.
Nel nostro caso r ha equazione $x + y = 1$. Pertanto, scelti ad esempio in r i punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (0, 1)$, le affinitá richieste sono tutte e sole quelle che fissano P_1 e P_2.
Imponiamo allora che $f(P_1) = P_1$ e $f(P_2) = P_2$:

$$f(P_1) = P_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + e = 1 \\ c + f = 0 \end{cases}$$

$$f(P_2) = P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b + e = 1 \\ d + f = 0 \end{cases}$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di 4 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} a + e = 1 \\ c + f = 0 \\ b + e = 0 \\ d + f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 - a \\ c = -f \\ b = -e \\ f = 1 - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 - a \\ c = d - 1 \\ b = a - 1 \\ f = 1 - d \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema é in funzione di due parametri (a e d). Le affinitá richieste hanno dunque equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow ad - (a-1)(d-1) = a + d - 1 \neq 0 \Rightarrow a + d \neq 1$

b) Imponiamo l'ulteriore condizione $f(P) = Q$:

$$\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2a - 2 \\ d - 1 + 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 2 \\ +2d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'unica affinitá del tipo richiesto é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Un'affinitá é una traslazione se e solo se il suo isomorfismo associato φ é l'identitá. Pertanto, nel nostro caso, risulta:

f é una traslazione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = d = 1.$

Ne segue che l'unica traslazione del tipo richiesto é l'identitá in quanto per $a = d = 1$ si ottiene $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

6. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$.

a) Scrivere l'equazione della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di $\mathbb{E}^2$ di centro $P = (1, 2)$ ed angolo $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ (in senso antiorario).

b) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_r, con r avente equazione $x - y + 1 = 0$.

c) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_s tale che $\rho_r \circ \rho_s = R_{P,\vartheta}$; individuare la retta s (passante per P).

Soluzione :

- **Metodo 1**

L'equazione di una rotazione $R_{O,\vartheta}$ di centro $O = (0, 0)$ e angolo ϑ (in senso antiorario) data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ora, se $P = (x_0, y_0)$ un punto qualsiasi, la rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro P ed angolo ϑ (in senso antiorario) pu essere ottenuta nel modo seguente: si trasla dapprima P nell'origine O (traslazione di vettore $\overrightarrow{PO}$), si effettua la rotazione di centro O e angolo ϑ (in senso antiorario) e infine si trasla O in P (traslazione di vettore $\overrightarrow{OP}$). Questo formalmente equivale alla seguente composizione:

$R_{P,\vartheta} = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}$, dove $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$.

Posto dunque $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$R_{P,\vartheta}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}))) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(\mathbf{x}-\mathbf{c})) = t_{\mathbf{c}}(A(\mathbf{x}-\mathbf{c})) = A(\mathbf{x}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$.

Nel nostro caso $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pertanto si ottiene che $R_{P,\vartheta}$ ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- **Metodo 2**

L' equazione di una rotazione $R_{P,\vartheta}$ di angolo ϑ (in senso antiorario) e di centro $P(x_0, y_0)$ qualsiasi della forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Per determinare i parametri p e q si impone la condizione che P sia un punto fisso (in quanto ogni rotazione lascia invariato il suo centro). In tal modo l'equazione risulta determinata in modo univoco.

Nel nostro caso avremo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove p e q sono determinati dal sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + p \\ 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ q = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della rotazione richiesta :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

7. Dire per quali valori di k esistono affinitá tali che l'immagine di $(0,1)$ sia il punto $(2,0)$, l'immagine del punto $(1,0)$ sia $(1,1)$ e l'immagine dell'origine sia $(2+k, 1-k)$. Determinare gli eventuali valori di k per cui si ottengono isometrie.

<u>*Soluzione :*</u>
L'equazione generale di un'affinitá in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ é:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (questa é la condizione affinché l'operatore φ associato a f, rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sia un automorfismo).
Imponiamo le condizioni $f(0,1) = (2,0)$, $f(1,0) = (1,1)$, $f(0,0) = (2+k, 1-k)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+k \\ 1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} b+e=2 \\ d+f=0 \\ a+e=1 \\ c+f=1 \\ e=2+k \\ f=1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-k \\ d=-1+k \\ a=-1-k \\ c=k \\ e=2+k \\ f=1-k \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-k & -k \\ k & -1+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+k \\ 1-k \end{pmatrix}$$

Imponiamo l'ulteriore condizione: $\begin{vmatrix} -1-k & -k \\ k & -1+k \end{vmatrix} \neq 0$, e cioè $1 \neq 0$ che è sempre verificata.
Per determinare le isometrie, imponiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} -1-k & -k \\ k & -1+k \end{pmatrix}$ sia ortogonale e cioè ${}^tA = A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} -1-k & -k \\ k & -1+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-k & k \\ -k & -1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\begin{cases} 2k^2+2k+1=1 \\ -2k^2=0 \\ -2k^2=0 \\ k^2-2k+1=1 \end{cases} \Rightarrow \{\ k=0$$

Quindi l'unica affinità del tipo richiesto è:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$