Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Sara Lamboglia e Alessandra Albanese

Soluzioni Tutorato 5
27 Ottobre 2011

1. Si consideri l'operatore $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$b(x, y) = x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$$

e sia $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$h(x, y) = b(f(x), f(y))$$

a) verificare che h é una forma bilineare simmetrica.

b) trovare il rango di h e costruire una base diagonalizzante.

c) determinare la segnatura della forma quadratica associata.

Soluzione:

a) Cerchiamo la matrice della forma bilineare simmetrica:
Siano $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ e $f(y) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3)$
Allora $b(f(x), f(y)) =$

$$(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} =$$

$$(x_1 + x_2, -x_2 - x_3, -x_1 - x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} =$$

$x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3$
Ora costruiamo la matrice associata a h:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè la matrice è simmetrica ho che h è una forma bilineare simmetrica.

b) Il rango è 2 perchè ho due colonne linearmente indipendenti. Per costruire una base diagonalizzante procedo nel seguente modo:
$v_1 = e_2$
Costruisco lo spazio ortogonale a v_1

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-1, -2, -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

Da cui ricavo che il sottospazio cercato è:$< (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) >$
$v_2 = (-1, 0, 1)$
Cerco il sottospazio ortogonale a v_1 e v_2:

$$(-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_1 + x_3 = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Per cui scelgo $v_3 = (1, -1, 1)$
Dunque la base diagonalizzante è: v_1, v_2, v_3
La matrice diagonalizzata è:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La segnatura è $(1, 1)$.

2. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard si considerino

$$v_1 = e_3,\ v_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ v_3 = 2e_1 + e_2 + e_4,\ v_4 = te_1 + te_3,\ t \in \mathbb{R}$$

Si determini il valore di t per il quale il procedimento di Grahm-Shimdt applicato a v_1, v_2, v_3, v_4 produce un vettore nullo, e si utilizzi tale procedimento per trovare vettori ortonormalizzati.
<u>*Soluzione:*</u>
Il procedimento di Grahm-Shimdt applicato a v_1, v_2, v_3, v_4 produce un vettore nullo se e solo se i vettori non sono linearmente indipendenti. Si può facilmente vedere che v_1, v_2, v_3, v_4 sono dipendenti $\forall t \in \mathbb{R}$. Applichiamo il procedimento di Grahm-Shimdt a v_1, v_2, v_3, v_4:
$w_1 = v_1 = (1, 0, 1, 0)$
$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 = (1, 1, 0, 1)$
$w_3 = v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{<w_2,w_2>} w_2 = v_3 - \frac{4}{3} w_2 = (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, \frac{-1}{3})$
$w_4 = v_4 - \frac{<v_4,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 - \frac{<v_4,w_2>}{<w_2,w_2>} w_2 - \frac{<v_4,w_3>}{<w_3,w_3>} w_3 = v_4 - tw_1 - \frac{t}{3} w_2 - tw_3 = 0$
e w_4 è nullo perché, come visto prima, i quattro vettori non sono linearmente indipendenti.
Ortonormalizziamo i vettori ottenuti dividendoli per la loro norma:
$\underline{w_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
$\underline{w_2} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\underline{w_3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, \frac{-1}{3})$

3. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto a una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:

   a) T è autoaggiunto.

   b) T è unitario.

<u>*Soluzione:*</u>

Denotiamo con $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Essendo C la matrice associata a un prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva), le entrate a, b, c devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0 \Rightarrow ac > b^2.$$

a) T è autoaggiunto (simmetrico) $\iff \langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y}) \rangle \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t(T(\overrightarrow{x}))\, C\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, T(\overrightarrow{y}) \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, C\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, CA \overrightarrow{y} \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tAC = CA$.

Risulta:

$${}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ b-c & 2c \end{pmatrix}$$

Quindi T è autoaggiunto $\Leftrightarrow 2b = b - c \Leftrightarrow b = -c \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -b \end{pmatrix}$, con $\begin{cases} a > 0 \\ ab + b^2 < 0 \end{cases}$

Per ottenere quindi un prodotto scalare rispetto a cui T sia autoaggiunto basta scegliere $-a < b < 0$ (ad esempio $a = 2$ e $b = -1$).

b) T è unitario $\Longleftrightarrow \langle T(\overrightarrow{x}), T(\overrightarrow{y})\rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow {}^t(T(\overrightarrow{x}))\, C\, T(\overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, \overrightarrow{y} \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, C\, A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, \overrightarrow{y} \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tA\, C\, A = C$.

Risulta:

$${}^tA\, C\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b+c & 2b-2c \\ 2b-2c & 4c \end{pmatrix}$$

Quindi T è autoaggiunto $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = a \\ 2b - 2c = b \\ 4c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Ma per $b = 0 = c$ C non è la matrice di un prodotto scalare (perchè tali b e c non verificano la disequazione $ac > b^2$). Ne segue che T non è mai unitario.

4. Siano date l'iperbole C di equazione:

$$x^2 - y^2 = 1$$

e la rotazione f di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di centro $P = (1, 1)$.
Si determini l'equazione di $f(C)$.
Soluzione:
Per prima cosa determiniamo le equazioni della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro $P = (1, 1)$ e angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sin\frac{\pi}{4} \\ sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove p e q sono determinati dal sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + p \\ 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della rotazione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Per determinare l'equazione di $f(C)$, basta trovare le espressioni di x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' e sostituirle nell'equazione della conica C. Per far ciò dobbiamo trovare la trasformazione inversa di f:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1 \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di $C : x^2 - y^2 = 1$ otteniamo l'equazione dell'iperbole $f(C)$ affinemente equivalente a C tramite l'affinità f:

$$0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1\right]^2 - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1\right]^2 - 1 =$$

$$= [\tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(y')^2 + 3 - 2\sqrt{2} + x'y' - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(x'+y')] - [\tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(y')^2 + 1 - x'y' - \sqrt{2}(x'-y')] - 1 =$$

$$= 2x'y' + 2(\sqrt{2}-1)x' - 2y' + 1 - 2\sqrt{2}$$

5. Sia fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{O}_{e_1,e_2}$ di $\mathbb{E}^2$. Sia f la rotazione di centro $C = (1,0)$ e angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario). Sia g la riflessione di asse la retta $x = 0$.
   a) scrivere le equazioni dell'isometria $g \circ f$.
   b) dire se tale isometria é una traslazione, una rotazione, una glissoriflessione o una riflessione.

   <u>*Soluzione:*</u>
   Per prima cosa trovo le equazioni di f e g:
   - Equazione di f:
     Impongo che sia una rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e che abbia come punto fisso $C = (1,0)$:
     Ricordiamo che la matrice di rotazione generica è:
     $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
     Quindi impongo C come punto fisso:
     $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
     Da cui ho $p = 1$ e $q = -1$
     Le equazioni sono:
     $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
     $$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$
   - Ricordiamo che la matrice di una riflessione è:
     $$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$
     Con θ l'angolo che forma la retta rispetto a cui si fa la riflessione con l'asse positivo delle ascisse
     $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
     Le equazioni di g sono:
     $$\begin{cases} x'' = -x \\ y'' = y \end{cases}$$

   Quindi si ha che $g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \circ \begin{pmatrix} 1-y \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix}$
   e cioè $\begin{cases} x'' = y - 1 \\ y'' = x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x'' + 1 \\ x = y'' + 1 \end{cases}$

L'isometria $f \circ g$ è inversa in quanto composizione di un'isometria diretta (la rotazione) e una inversa (la riflessione). Quindi può essere una riflessione (se fissa una retta) o una glissoriflessione (se non fissa alcun punto).
Vediamo quali sono i puti fissati da $f \circ g$:
$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ x = y + 1 \end{cases}.$
Il sistema non ha soluzioni, quindi l'isometria non fissa alcun punto e di conseguenza è una glissoriflessione.

6. (*Simmetria rispetto a un punto*)
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$). Fissiamo in $\mathbb{A}$ un punto C. Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ il punto simmetrico di P rispetto a C, cioè il punto $f(P)$ che soddisfa l'identità vettoriale:

$$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$$

<u>*Soluzione:*</u>

Facciamo innanzitutto vedere che l'isomorfimo φ associato a f $\;-\mathbf{1}_V$; infatti, utilizzando l'identità vettoriale $\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$, si ha:

$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(P)C} + \overrightarrow{Cf(Q)} = -\overrightarrow{Cf(P)} + \overrightarrow{Cf(Q)} = -(-\overrightarrow{CP}) - \overrightarrow{CQ} = -(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}) = -\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$, dove $\varphi = -\mathbf{1}_V$.

Siano ora $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $C = (c_1, \ldots, c_n)$, $f(P) = (y_1, \ldots, y_n)$ e $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ una base di V si ha:

$$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP} \Rightarrow (y_1 - c_1)\overrightarrow{u_1} + \ldots + (y_n - c_n)\overrightarrow{u_n} = -[(x_1 - c_1)\overrightarrow{u_1} + \ldots + (x_n - c_n)\overrightarrow{u_n}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 - c_1 \\ \vdots \\ y_n - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - x_1 \\ \vdots \\ c_n - x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - x_1 \\ \vdots \\ 2c_n - x_n \end{pmatrix}$$

che rappresentano le equazioni dell'affinità cercata.