Esercitazione del corso Elementi di Geometria marzo 2018

1. Si risolva il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 = 4 \end{cases}$$

1. Si risolvano i seguenti sistemi lineari in $\mathbb{R}^3$

$$a. \begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_2 + X_3 = -1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 3X_3 = 1 \\ -X_1 + X_2 + X_3 = -1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ 6X_1 - 3X_2 + 3X_3 = 3 \\ -2X_1 + X_2 - X_3 = -1 \end{cases} \qquad d. \begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 = 1 \\ X_2 + X_3 = -1 \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 = -2 \end{cases}$$

1. Si risolvano i seguenti sistemi lineari in $\mathbb{R}^4$

$$a. \begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 = 4 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 1 \\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 = -1 \\ X_1 + 3X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 = 1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 3X_1 + \sqrt{2}X_2 - X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + \sqrt{3}X_4 = 4 \end{cases} \qquad d. \begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 1 \\ 2X_2 + X_3 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 2 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 - 2X_4 = 2 \end{cases}$$

1. Si risolvano i seguenti sistemi lineari in $\mathbb{R}^5$

$$a. \begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 = 4 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 1 \\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 = -1 \\ X_1 + 3X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 = 1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 3X_1 + \sqrt{2}X_2 - X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + \sqrt{3}X_4 = 4 \end{cases} \qquad d. \begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 1 \\ 2X_2 + X_3 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 2 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 - 2X_4 = 2 \end{cases}$$

3. Determinare in funzione del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ la compatibilità dei seguenti sistemi ed in caso siano compatibili determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

$$\text{a.} \begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ (3-a)X_2 + X_3 + aX_4 = -1 \\ X_1 + 3X_3 + X_4 = 2 \\ 3X_1 + 3X_3 + aX_4 = 4 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} aX_1 + aX_2 = 2 \\ X_2 + aX_3 = 0 \\ aX_1 + aX_3 = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ -X_1 - aX_2 + 2aX_3 = -\frac{1}{3} \\ aX_1 + aX_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

3.Dato il sistema lineare omogeneo a coefficienti in $\mathbb{R}$ dipendente da due parametri reali a, b:

$$\begin{cases} aX_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + aX_2 = 0 \\ bX_3 + X_4 = 0 \\ X_3 + bX_4 = 0 \end{cases}$$

a. Discutere, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la compatibilità del sistema.

b. Nel caso in cui il sistema risulti compatibile risolverlo.