Esercitazioni di Elementi di Geometria marzo 2018

a. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi risultino essere sottospazi di $\mathbb{R}^4$

- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 x_3 x_4 = 1\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo risulta essere un sottospazio.

b. Sia $\mathbb{R}[T]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficenti reali. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi risultnoi essere sottospazi di $\mathbb{R}[T]$. Denotiamo con $\deg(T)$ il grado di T.

- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid \deg(P(T)) = 4\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid \deg((P(T)) \leq 4\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid \deg(P(T)) \geq 4\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid \deg(P(T)) \leq n\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) = 0\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) = 1\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) \neq 0\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(x_0) = 0 \text{ per un fissato } x_0 \in \mathbb{R}\}$

c. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici a coefficenti reali $n \times n$. (Ricordiamo che la tracci di una matrice ($\mathrm{tr}(A)$ è la somma degli elementi sulla diagonale)

- $\{M \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$
- $\{M \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$
- $\{M \in V \mid \det(A) = 0\}$
- $\{M \in V \mid \det(A) = 1\}$
- $\{M \in V \mid {}^tA = A\}$
- $\{M \in V \mid {}^tA = -A\}$

d. Determinare una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$

- $V =< (3, 2, 1), (2, 0, 1), (4, 8, 0) >$
- $V =< (3, 3, 9), (1, 0, 1), (0, 1, 2) >$
- $V =< (3, 3, 6), (1, 2, 3), (0, -1, -1) >$
- $V =< (1, 1, -2), (1, -1, 2), (0, 2, -4) >$
- $V =< (3, 2, 1), (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}), (4, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}) >$
- $V =< (1, 0, \frac{1}{2}), (2, -1, 1), (-1, \frac{1}{7}, 0) >$

e. Determinare una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$

- $V =< (0,1,1,1),(1,2,3,0),(2,6,8,4),(2,5,7,2) >$
- $V =< (1,0,1,2),(3,0,1,2),(2,0,0,1),(2,0,2,3) >$
- $V =< (-1,0,-1,-2),(\frac{1}{2},0,(\frac{1}{2},1),(1,1,1,2),(1,3,1,2) >$
- $V =< (1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,1) >$
- $V =< (0,1,1,4),(0,-1,0,-4),(0,1,2,4),(0,1,3,4) >$

f. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici a coefficenti reali 2×2. Determinare una base dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di V

- $\{M \in V \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$
- $\{M \in V \mid {}^tA = A\}$

g. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficenti reali di grado al più 4. Determinare una base dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di tutto V

- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) = 3P(1) \quad e \quad P(2) = -P(-1)\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) = -P(1)\}$
- $\{P(T) \in \mathbb{R}[T] \mid P(0) - P(1) + P(2) = 0 \quad e \quad P(1) = -P(-1)\}$