UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Fisica
Elementi di Geometria
Prof. A. Verra
Collezione di esercizi da esoneri precedenti

I) Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 reali. Su V consideriamo il prodotto scalare definito da:

$$< A, B >= \mathrm{Tr}({}^tBA)$$

Sia W il sottospazio vettoriale generato da

$$\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$$

(a) Applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a B determinando cosi una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare sopra definito).
(b) Completare la base ortogonale trovata in (a) ad una base ortogonale di tutto V
(c) Determinare le componenti di $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata in (b).

II) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 - X_4 = 0 \\ X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

e sia W_λ il sottospazio di R^4 generato dai seguenti vettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda - 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare la dimensione di $V + W_\lambda$ e $V \cap W_\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Scegliere un valore λ_0 per cui $\dim(V \cap W_\lambda) = 1$ e per tale valore determinare una base $V \cap W_\lambda$
(c) Completare la base trovata in (b) ad una base di tutto $V + W_\lambda$ e ad una di tutto R^4

III) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - 3X_4 = 0 \\ 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e sia $v_\lambda = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(a) Determinare per quali valori di λ v_λ appartiene a V.
(b) Per uno dei valori di λ trovati in (a) completare v_λ ad una base di V e successivamente ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(c) Sia $W = \mathrm{Span}\{w_1 = (0, 1, 0, 1), w_2 = (-3, 0, 2, 0)\}$ determinare la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

IV) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e sia W_t il sottospazio di R^4 generato dai seguenti vettori: $\begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ t-4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la dimensione di $V + W_t$ e $V \cap W_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(b) Scegliere un valore t_0 per cui $\dim(V \cap W_t) = 1$ e per tale valore determinare una base $V \cap W_t$
(c) Completare la base trovata in (b) ad una base di tutto $V + W_t$

Dato il prodotto scalare

$$< \overline{x}, \overline{y} >= x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_4 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_1 + 3x_4y_4$$

Usare il metodo di Gram-Schmidt per ortogonalizzare il seguente insieme di vettori $\overline{v}_1$=(1, 0, 1, 0), $\overline{v}_2$=(0, 1, 0, 1), $\overline{v}_3$=(1, 1, 0, 0), $\overline{v}_4$=(0, 0, 1, 1) e $\overline{v}_5$=(1, 0, 0, 1)