Esercitazione del corso Elementi di Geometria del 26 Aprile 2018

1 Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$,. Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(e_1) = 2T(e_1 + e_2) = e_3 \quad \text{e} \quad T(e_3) = 2T(e_3 + e_4) = e_1$$

a) Determinare il nucleo di T ed una sua base
b) Determinare l'immagine di T ed una sua base
c) Scrivere la matrice di T rispetto alle base canonica di R^4.

2 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare data da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice di T rispetto alle basi canoinche di $\mathbb{R}^3$ e R^4
2. Determinare nucleo e immagine
3 Determinare la matrice di T rispetto alla base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\overline{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\overline{v}_2 = (0, 1, -2)$ e $\overline{v}_3 = (-1, -1, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base alla base $b' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4\}$ di R^4, dove $\overline{w}_1 = (2, 0, 1, 0)$, $\overline{w}_2 = (2, 1, -1, 0)$, $\overline{w}_3 = (-1, -1, 0, 0)$ e $\overline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)$
5. Determinare la matrice di T rispetto alla base b di R^3 e alla base b' di R^4, dove b e b' sono le basi definite nei punti 2 e 3 rispettivamente.

3 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare data da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice di T rispetto alle basi canoinche di $\mathbb{R}^3$ e R^2
2. Determinare nucleo e immagine
3. Determinare la matrice di T rispetto alla base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\overline{v}_1 = (2, -2, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, 1, -2)$ e $\overline{v}_3 = (0, -1, 3)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base alla base $b' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ di R^2, dove $\overline{w}_1 = (3, 5)$, $\overline{w}_2 = (2, -3)$.
5. Determinare la matrice di T rispetto alla base b di R^3 e alla base b'di R^4, dove b e b' sono le basi definite nei punti 2 e 3 rispettivamente.

4 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare data da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice di T rispetto alle basi canoinche di $\mathbb{R}^2$ e R^4
2. Determinare nucleo e immagine
3. Determinare la matrice di T rispetto alla base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\overline{v}_1 = (2, 1)$ e $\overline{v}_2 = (1, -2)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base alla base $b' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4\}$ di R^4, dove $\overline{w}_1 = (2, 0, 1, 1)$, $\overline{w}_2 = (-1, 1, -1, 0)$, $\overline{w}_3 = (-1, -1, 0, 2)$ e $\overline{w}_4 = (1, 0, 0, 1)$

5. Determinare la matrice di T rispetto alla base b di R^3 e alla base b'di R^4, dove b e b' sono le basi definite nei punti 2 e 3 rispettivamente.

5 Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$,. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare tale che

$$T(e_1) = -e_1 - e_2, \quad T(e_2) = -4e_1 + e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_2 - e_3, \quad T(e_4) = ke_3 + ke_4$$

a) Scrivere la matrice di T_k associata all base standard di R^4
b) Determinare nucleo e immagine per ogni k

6 Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \;\; T(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = T(\overline{e}_1 - \overline{e}_3), \;\; T(\overline{e}_1 + \overline{e}_4) = 2\overline{e}_4 + \overline{e}_2, \;\; T(\overline{e}_1) = \overline{e}_1,$$

dove $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, e_3, \overline{e}_4\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$.
a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard,
b) Determinare ker$T$ e Im(T).
c) Determinare autovalori e basi dei relativi autospazi di T, determinare se T è diagonalizzabile.
d) Esiste un sottospazio tridimensionale V di $\mathbb{R}^4$ tale che T ristretta a V sia iniettiva (esibirne uno o dimostrare che non puo' esistere).