Esercitazione del corso Elementi di Geometria Aprile 2018

I. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$. Sia W_λ il sottospazio generato da: $w_1 = (\lambda, 1, 0, 1)$ e $w_2 = (1, 1, 0, \lambda^2)$.

a) Determinare la dimensione di V, W, $V \cap W$ e $V + W$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Verificare che per $\lambda = 2$, $z = (7, 2, 0, -7)$ è una base $V \cap W$ e completarla ad una base di $V + W$.

II. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - 3X_4 = 0 \\ 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e sia $v_\lambda = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare per quali valori di λ v_λ appartiene a V.

(b) Per uno dei valori di λ trovati in (a) completare v_λ ad una base di V e successivamente ad una base di $\mathbb{R}^4$.

(c) Sia $W = \text{Span}\{w_1 = (0, 1, 0, 1), w_2 = (-3, 0, 2, 0)\}$ determinare la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

III.

Consideriamo i seguenti sottospazi di R^4: $W_h = Span\{((1, -1, 1, 0), (1, 2, , 0, -1), (1, -h, 3, 2))\}$ e U lo spazio delle soluzioni del sistema omogeno

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 = 0 \\ X_1 - X_4 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare la dimensione di U e di W_h e determinare esplicitamente due basi di tali sottospazi per ogni h in $\mathbb{R}$.

b) Determinare le dimensioni di $U \cap W_h$ e $W_h + U$, per ogni h in $\mathbb{R}$.

IV. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e sia W_t il sottospazio di R^4 generato dai seguenti vettori: $\begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ t-4 \end{pmatrix}$

(a) Determinare la dimensione di $V + W_t$ e $V \cap W_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Scegliere un valore t_0 per cui $\dim(V \cap W_t) = 1$ e per tale valore determinare una base $V \cap W_t$

(c) Completare la base trovata in (b) prima ad una base di tutto $V + W_t$ e poi ad una base di R^4.

V. Siano

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

a) Sia $U =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$ il sottospazio generato da w_1, w_2, w_3, e w_4. Si calcoli la dimensione di U.

b) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$, tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

c) Sia k un numero reale e siano

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix},$$

determinare (se esistono) i valori di k per i quali $\dim(U \cap < v_k, z_k >) = 1$.