I.

Consideriamo i seguenti sottospazi di R^4: $W_h = Span\{((1,\,-1,\,h,\,0),\,(1,\,2,\,0,\,-1),\,(1,\,-h,\,3,\,2))\}$ e U_h lo spazio delle soluzioni del sistema omogeno

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 0 \\ X_1 + hX_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare la dimensione di U_h e di W_h e determinare esplicitamente due basi di tali sottospazi per ogni h in $\mathbb{R}$.
b) Determinare le dimensioni di $U \cap W_h$ e $W_h + U$, per ogni h in $\mathbb{R}$.

II.

Sia $V_k = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ k^2-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ e sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di V e completarla ad una base di R^4.
b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare un sottospazio W_k tale che $\mathbb{R}^4 = V_k \bigoplus W_k$
c) Determinare per quali valori di k si ha che $\overline{v} \in V_k$.
d) Per i k trovati in c) scrivere le coordinate di $\overline{v}$ rispetto alla base trovata in a).

III.

Consideriamo i seguenti sottospazi di R^4: $W_h = Span\{((h-1,\,h-1,\,1,\,0),\,(1,\,2,\,,\,0,\,-1),\,(1,\,-h,\,3,\,2))\}$ e U_h lo spazio delle soluzioni del sistema omogeno

$$\begin{cases} hX_1 + 2X_3 = 0 \\ hX_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare la dimensione di U_h e di W_h e determinare esplicitamente due basi di tali sottospazi per ogni h in $\mathbb{R}$.
b) Determinare le dimensioni di $U \cap W_h$ e $W_h + U$, per ogni h in $\mathbb{R}$.

IV.

Sia $\{e_1,\,e_2,\,e_3,\,e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$,. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare tale che

$$T(e_1) = -e_1 - e_2, \quad T(e_2) = -4e_1 + e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_2 - e_3, \quad T(e_4) = ke_3 + ke_4$$

a) Scrivere la matrice di T_k associata all base standard di R^4 ed il polinomio caratteristico di T_k
b) Determinare per quali valori di k la trasformazione T_k è diagonalizzabile.
c) T_k è suriettiva per ogni k? (giustificare la risposta)

V.

Sia $\{e_1, e_2,\,e_3,\,e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e siano:

$$v_1 = e_1 + e_3, \qquad v_2 = e_1 - ke_3, \qquad v_3 = ke_1 + e_2, \qquad v_4 = e_4, \qquad v_5 = e_2 - e_3.$$

Siano $U =< v_1,\,v_2, v_3 >$ e $W =< v_1,\,v_3, v_4, v_5 >$.
a) Calcolare la dimensione di U e W per ogni $k \in \mathbb{R}$
b) Determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \subseteq W$.
b) Determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

VI.

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$,. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che

$$T(e_1) = e_2 - e_1, \quad T(e_2) = -2e_1 + ke_2 - ke_3, \quad T(e_3) = e_2 + e_3,$$

a) Scrivere la matrice di T associata all base standard di R^3 ed il polinomio caratteristico di T.
b) Determinare gli autovalori, e la dimensione degli autospazi per ogni $k \in \mathbb{R}$.
c) Determinare per quali valori di k la trasformazione T_k è diagonalizzabile.
d) T_k è suriettiva per ogni k? (giustificare la risposta)

VII.

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \ \ T(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = T(\overline{e}_1 - \overline{e}_3), \ \ T(\overline{e}_1 + \overline{e}_4) = 2\overline{e}_4 + \overline{e}_2, \ \ T(\overline{e}_1) = \overline{e}_1,$$

dove $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, e_3, \overline{e}_4\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$.
a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard,
b) Determinare $\ker T$ e $\mathrm{Im}(T)$.
c) Determinare autovalori e basi dei relativi autospazi di T, determinare se T è diagonalizzabile.
d) Esiste un sottospazio tridimensionale V di $\mathbb{R}^4$ tale che T ristretta a V sia iniettiva (esibirne uno o dimostrare che non puo' esistere).

VIII.

Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + ky - z \\ x - y + kz \\ kx + 2y + 2z \end{pmatrix}$

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta T_k rispetto alla base conica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare per quali valori di k $\overline{v}$ risulti un autovettore di T_k.
(c) Per il valore k_0 trovato in (b) determinare il polinomio caratteristico di T_{k_0}, tutti i suoi autovalori e le basi dei relativi autospazi.

IX.

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base di $V = \ker(T)$ e di $W = \mathrm{Im}(T)$.
b) Verificare che $\mathbb{R}^4 = V \bigoplus W$
c) Dedurre che T induce una trasformazione lineare biunivoca $T_W : W \to W$; scrivere la matrice che rappresenta T_W rispetto alla base di W trovata in a)
d) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di T_W.

X.

3 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare data da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice di T rispetto alle basi canoinche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$
2. Determinare nucleo e immagine
3. Determinare la matrice di T rispetto alla base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
4. Determinare la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base alla base $b' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ di R^2, dove $\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

XI.

3 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare data da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice di T rispetto alle basi canoinche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Determinare nucleo e immagine
3. Determinare la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, dove $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Determinare la matrice di T rispetto alla base alla base $b' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ di R^2, dove $\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.