Collezione di esercizi da vecchi esoneri

I.

Sia

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z, \frac{3x}{2} + \frac{5y}{2} + 2z, -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2})$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard,
b) Determinare autovalori e basi dei relativi autospazi di T,
c) Determinare se T è diagonalizzabile.

II.

Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$,. Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(e_1) = 2T(e_1 + e_2) = e_3 \quad \text{e} \quad T(e_3) = 2T(e_3 + e_4) = e_1$$

a) Determinare il nucleo di T ed una sua base
b) Determinare l'immagine di T ed una sua base
c) Scrivere la matrice di T rispetto alle base canonica di R^4.
d) Determinare gli autovalori non nulli e relativi autovettori.

III.

Date le rette di equazioni parametriche

$$\ell : \begin{cases} x = k + 2t \\ y = -1 + (k-2)t \\ z = kt \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = k - 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

a) Determinare per quali valori di k le rette risultino sghembe.
b) Scelto un valore di k per cui r, ed ℓ risultino incidenti, e detto A il punto di intersezione, calcolare l'area del triangolo avente come vertici A, l'intersezione di ℓ con il pano $x = 0$ e l'intersezione di r con il piano $y = 0$.
c) Sia P_r l'intersezione di r con il piano $z = 0$ e Q_ℓ l'intersezione di ℓ con il piano $z = 0$. Determinare i valori di k per cui la distanza tra P_r e Q_ℓ sia uguale a 3.
d) Sia $Q = (0, 0, 0)$, calcolare la distanza di Q da r e determinare se esiste un valore minimo al variare di $k \in \mathbb{R}$.

IV.

Dato il fascio di coniche $\mathcal{C}_h$

$$2hxy + (1 - h^2)y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

a) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_h$ risulti una conica degenere.
b) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$, il tipo della conica $\mathcal{C}_h$
c) Determinare il centro di $\mathcal{C}_h$ e trovare il luogo dei centri.
d) Per $h = 2$ calcolare gli assi e gli asintoti.

V.

a) Scrivere l'equazione della sfera S centrata in $(1, -2, 1)$ e tangente al piano $\pi : 3x + 4y = 0$
b) Determinare quale piano parallelo a π interseca la sfera S nella la circonferenza di raggio massimo possibile.

VI.

Sia $P = (1, 0)$, $Q = (-1, -1)$ e $\mathcal{C}$ la circonferenza centrata in $(-1, 0)$ e di raggio 1
(a) Determinare le rette tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P
(b) Determinare una circonferenza centrata in Q che sia tangente $\mathcal{C}$.
(c) Determinare le intersezioni tra le rette trovate in (a) e la circonferenza trovata in (b)

(d) Calcolare la distanza tra i punti trovati in (c) e la retta congiungente i centri delle due circonferenze

VII

Siano $\overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\overline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\overline{z}) = -3\overline{z} + 2\overline{w},\ T(\overline{w}) = -2\overline{z} + \overline{w}.$$

a) Verificare che $\{\overline{z}, \overline{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare la matrice di T rispetto a $\{\overline{z}, \overline{w}\}$.
b) Determinare gli tutti gli autovalori di T e le basi per i relativi autospazi.
c) Determinare se T (o equivalentemente se la matrice A che rappresenta T è diagonalizzabile.
d) Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica.

VIII

Sia $\overline{v}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k^2+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y-z \\ 3x-z \end{pmatrix}$
(a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base conica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare per quali valori di k $\overline{v}_k$ risulti un autovettore di T.
(c) Determinare il polinomio caratteristico di T, tutti gli autovalori e le basi dei relativi autospazi.
(d) Dire se T è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare esplicitamente due matrici B e Δ, dove Δ é una matrici diagonale e $\Delta = B^{-1}AB$.

IX

Sia $V =< \overline{e}_1, \overline{e}_2 + \overline{e}_3 >\subset \mathbb{R}^4$ dove $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ é la base standard di R^3. Determinare esplicitamente una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che: $ker(T) = V$ e $Im(T) =< \overline{e}_2 + \overline{e}_4, \overline{e}_4 >$ e determinare tutti gli autovalori e le basi dei relativi autospazi della trasformazione trovata.

X

Sia $\{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3,\ \overline{e}_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$,. Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(\overline{e}_1) = -e_2 + 2e_3,\ T(\overline{e}_2) = 3\overline{e}_3 - 2\overline{e}_2,\ T(\overline{e}_3) = 2\overline{e}_2 - 3\overline{e}_3,\ T(\overline{e}_4) = -\overline{e}_3 + 2\overline{e}_2$$

a) Determinare una base per il nucleo di T e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
b) Determinare una base per l'immagine di T e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
c) Scrivere la matrice di T rispetto alle base canonica di R^4.
d) Scrivere la matrice di T rispetto alle basi trovate in a) e b)

XI

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_3$, $T(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = T(\overline{e}_1 - \overline{e}_3)$, $T(\overline{e}_1 + \overline{e}_4) = 2\overline{e}_4 + \overline{e}_2$, $T(\overline{e}_1) = \overline{e}_1$, dove $\{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ e_3,\ \overline{e}_4\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$.
a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard,
b) Determinare $\ker T$ e $\mathrm{Im}(T)$.
c) Determinare autovalori e autospazi di T, determinare se T è diagonalizzabile.
d) Esiste un sottospazio tridimensionale V di $\mathbb{R}^4$ tale che T ristretta a V sia iniettiva (esibirne uno o dimostrare che non puo' esistere).

XII

a) Determinare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro il punto d'intersezione delle rette $r : y = 2x + 1$ e $s : y = -x - 2$ e di raggio uguale a $\sqrt{5}d$ dove d e' la distanza dell'origine da r.
b) Determinare le rette tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per l'origine ed i rispettivi punti di tangenza.
c) Determinare la distanza dei punti trovati in b) dalla retta $x + y = 0$.
d) (bonus) Determinare le due circonferenze centrate nell'origine e tangenti a $\mathcal{C}$

XIII

Sia $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\overline{e}_2+\overline{e}_3)=2\overline{e}_1+\overline{e}_3,\quad T(\overline{e}_1+\overline{e}_3)=T(\overline{e}_1-\overline{e}_3),\ \ T(\overline{e}_1+\overline{e}_4)=2\overline{e}_4+\overline{e}_2,\ \ T(\overline{e}_1)=\overline{e}_1,$$

dove $\{\overline{e}_1,\,\overline{e}_2,\,e_3,\,\overline{e}_4\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$.
a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard,
b) Determinare $\ker T$ e $\mathrm{Im}(T)$.
c) Determinare autovalori e basi dei relativi autospazi di T, determinare se T è diagonalizzabile.
d) Esiste un sottospazio tridimensionale V di $\mathbb{R}^4$ tale che T ristretta a V sia iniettiva (esibirne uno o dimostrare che non puo' esistere).

XIV

Sia $\overline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ e sia $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T_k\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+ky-z\\x-y+kz\\kx+2y+2z\end{pmatrix}$
(a) Scrivere la matrice A che rappresenta T_k rispetto alla base conica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare per quali valori di k $\overline{v}$ risulti un autovettore di T_k.
(c) Per il valore k_0 trovato in (b) determinare il polinomio caratteristico di T_{k_0}, tutti i suoi autovalori e le basi dei relativi autospazi.

XV

Dato il piano π di equazione cartesiana $-2kx+y+(k-3)z+1=0$ ($k\in\mathbb{R}$) e le rette di equazione parametrica

$$\ell:\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\k^2\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\qquad m:\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}k^3\\1\\(k-k^2)\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori di k la retta ℓ appartenga al piano π
b) Determinare per quali k la retta m risulti perpendicolare al piano π
c) Determinare per quali valori di k le rette risultino sghembe.