UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Fisica
Elementi di Geometria

A. Verra e V. Talamanca

Nome.. . . . . .Cognome. . . . . .Matricola

Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti. Vanno consegnati SOLO questi fogli

Prova scritta del 19 giugno 2018

I.

Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammetta soluzioni, e per tali k calcolarle.

$$\left\{\begin{array}{r}(k-1)X_1+X_2-X_3+2X_4=1\\(3k-3)X_1+(k+2)X_2+(k-5)X_3+9X_4=4\\(k-1)X_1+X_2+(k-3)X_3+5X_4=2\\(1-k)X_1-X_2+(k-1)X_3-(k+2)X_4=-2\end{array}\right.$$

II.

Sia $W_h \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \\ h^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ -1 \\ h+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $U_h \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogeno

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$$

a) Determinare la dimensione di U_h e di W_h e determinare esplicitamente due basi di tali sottospazi per ogni h in $\mathbb{R}$.
b) Determinare le dimensioni di $U_h \cap W_h$ e $W_h + U_h$, per ogni h in $\mathbb{R}$.
c) Determinare esplicitamente una base di $U_h \cap W_h$, per ogni $h \in \mathbb{R}$

III.

Sia $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\overline{e}_1) = -\frac{1}{4}\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3, \qquad T(\overline{e}_2-\overline{e}_1) = \frac{1}{4}\overline{e}_1+(k^2-1)\overline{e}_2-3\overline{e}_3, \qquad T(\overline{e}_3-\overline{e}_2) = -k^2\overline{e}_2+3\overline{e}_3$$

a) Scrivere la matrice di T associata all base standard di R^4 ed il polinomio caratteristico di T.
b) Determinare gli autovalori, e la dimensione degli autospazi per ogni $k \in \mathbb{R}$.
c) Determinare per quali valori di k la trasformazione T_k è diagonalizzabile.

IV.

Sia C_h la conica di equazione $C_h : hx^2 + y^2 - 3x - 2hy + 2 = 0$

a) Determinare per quali h la conica C_h risulti essere degene ed il tipo di C_h per ogni $h \in \mathbb{R}$

b) Determinare il centro di C_h per ogni $h\in\mathbb{R}$. Verificare che i centri giacciono su una conica e determinarne equazione e tipo.

c) per $h = 0$ scrivere la trasformazione di coordinate che trasforma C_0 in una conica in forma standard.

V.

Dato il piano π_h di equazione cartesiana $x + (h-1)y + z - h - 1 = 0$ ($h \in \mathbb{R}$) e le rette di equazione parametriche

$$\ell_h : \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = ht + 2 \end{cases} \qquad\qquad m_h : \quad \begin{cases} x + y = 3h \\ hx - z = 0 \end{cases}$$

a) Per quali valori h le rette ℓ_h ed m_h sono sghembe? e per quali risultino incidenti?

b) Sia P_h il punto d'intersezione tra π_h e ℓ_h. Calcolare la distanza P_h da m_h.

c) Per quali valori di h esiste una retta perpenicolare a π_h incidente sia ℓ_h che m_h?