UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Fisica

Elementi di Geometria

A. Verra e V. Talamanca

Seconda prova in corso d'anno 8 Maggio 2017

Nome.................................Cognome.................................Matricola ....

Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti. Vanno consegnati SOLO questi fogli

I.

Dati $v_1 = (1, 0, -h)$, $v_2 = (1, h, 1)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ in $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare per quali $h \in \mathbf{R}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Per i valori trovati nel punto a) calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base standard di $\mathbf{R}^3$ alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

c) Determinare le componenti del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

II.

Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ definito da $V = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$. Sia W_λ il sottospazio generato da: $w_1 = (\lambda,\, 1,\, 0, 1)$ e $w_2 = (1,\, 1,\, 0, \lambda^2)$.

a) Determinare la dimensione di V, W, $V \cap W$ e $V + W$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

b) Verificare che per $\lambda = 2$, $z = (7,\, 2,\, 0,\, -7)$ è una base $V \cap W$ e completarla ad una base di $V + W$.

III.

Posto

$$< (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4),\, (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_1y_3 + 2x_3y_3 + x_4y_3 + x_3y_4 + 2x_4y_4$$

a) Si verifichi che $< \cdot, \cdot >$ è un prodotto scalare su $\mathbf{R}^4$.

b) Si utilizzi il procedimento di Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base standard di $\mathbf{R}^4$, rispetto a $< \cdot, \cdot >$.

c) Sia W il sottospazio generato da $e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3$, determinare un vettore ortogonale a W.