UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Fisica
Elementi di Geometria
A. Verra e V. Talamanca
Terza prova in corso d'anno 19 giugno 2017

Nome.................................Cognome.................................Matricola ....

Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti.
Vanno consegnati SOLO questi fogli

I.

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ x_1 + (2-k)x_2 + (2k-4)x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori di k l'applicazione T_k è diagonalizzabile
b) Determinare per quali valori di k l'applicazione T_k non è suriettiva.
c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $2e_2 + e_3$ appartiene al nucleo di T_k?
d) Per $k = 5$ determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

II.

Sia C_k la conica di equazione $C_k : (k+2)x^2 + 4xy + (k-1)y^2 - 2(k+1)x = 0$

a) Trovare le coniche degeneri della famiglia, fra di esse ci sono due rette incidenti?
b) Determinare il tipo di C_k per ogni $k \in \mathbb{R}$
c) Determinare le direzioni degli assi per $k = 0$.
d) (3 punti di bonus) Qual'e' il massimo numero di punti che possono appartenere a tutte le coniche C_k? (giustificare la risposta)

III.

Dato il piano π_k di equazione cartesiana $(k-1)x + ky + z + 3 = 0$ $(k \in \mathbb{R})$ e le rette di equazione parametriche

$$\ell_k : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -k+1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad m_k : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2k \\ -k^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare i valori di k, se esistono, per cui ℓ_k e m_k risultino simultaneamente perpendicolari a π_k.

b) Determinare per quali valori k le rette ℓ_k ed m_k sono sghembe.

c) Fissato $k = 1$, sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare la distanza di P da π_k, ℓ_k, e m_k.

d) Trovare i valori di k, se esistono, per cui ℓ_k e m_k risultino perpendicolari e quali per cui risultino parallele.