

NOTE DEL CORSO: VARIETÁ ALGEBRICHE UNIRAZIONALI: INTRODUZIONE CON ESEMPI*

ALESSANDRO VERRA

1. UNIRAZIONALITÀ, RAZIONALITÀ, PROBLEMA DI LÜROTH

1.1. Parametrizzazioni razionali di una varietà algebrica.

Questa prima lezione ha come scopo principale quello di presentare un primo gruppo di esempi elementari e tuttavia fondamentali, anche dal punto di vista storico. Questi esempi daranno maggiore significato ad un gruppo di definizioni e di risultati che verranno contestualmente presentati.

Il corso é indirizzato, in modo un po' divergente, verso due temi diversi: da un lato il tema delle ipersuperfici in $\mathbf{P}^n$ di grado piccolo, cioè minore o uguale a n , e le questioni che riguardano la loro unirazionalità / razionalità.

Dall' altro considereremo vari spazi di moduli collegati alle curve, e di nuovo, diverse questioni dello stesso tipo. Un' argomento prevalente e comune ad entrambi questi temi sarà, come si vedrà subito, sarà lo studio delle ipersuperfici cubiche.

Ha molto senso, almeno per quanto riguarda il primo dei due temi, non limitarsi al caso di varietà definite su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica zero. Ciononostante, sia per seguire l' evoluzione storica sia per semplificare, lavoreremo prevalentemente nel caso $k = \mathbf{C}$. Aggiungeremo però varie osservazioni ed esempi riguardanti gli altri casi in cui k ha caratteristica positiva oppure non é algebricamente chiuso.

Possiamo iniziare considerando lo spazio affine k^n , definito su un campo k , e un suo sottoinsieme non vuoto

$$V \subset k^n$$

definito da un sistema di equazioni polinomiali

$$F_1(X_1, \dots, X_n) = \dots = F_s(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Un problema del tutto naturale e' il seguente:

Problema 1.1. *Determinare equazioni parametriche razionali per V .*

Si tratta cioè di determinare funzioni razionali $\phi_1, \dots, \phi_n \in k(t_1, \dots, t_r)$ tali che l'immagine della mappa razionale

$$\phi : k^r \rightarrow k^n$$

da esse definita sia V o contenga un aperto denso. V e' una varietà algebrica affine, piu' in generale possiamo dare la seguente

* PRIMA VERSIONE

Definizione 1.2. Una varietà algebrica X , definita su k , è unirazionale su k se esiste una mappa razionale dominante

$$\phi : k^r \rightarrow X.$$

In tal caso diremo che ϕ è una parametrizzazione razionale di X su k . Una parametrizzazione razionale ϕ determina una estensione di campi

$$\phi^* : k(X) \rightarrow k(t_1, \dots, t_r)$$

dove $k(X)$ indica il campo delle funzioni razionali di X .

Proposition 1.3. Sia $n = \dim X$, seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1 X è unirazionale su k .
- 2 Esiste una estensione di k -algebre $k(X) \subset k(t_1, \dots, t_r)$.
- 3 Esiste una estensione di k -algebre $k(X) \subset k(t_1, \dots, t_n)$.

L'esistenza di una parametrizzazione razionale $\phi : k^r \rightarrow X$ fa sperare nell'esistenza di una mappa birazionale $\psi : k^n \rightarrow X$ che sia invertibile su un aperto denso.

Definizione 1.4. X è razionale su k se esiste una parametrizzazione birazionale

$$\psi : k^n \rightarrow X.$$

In tal caso X ha dimensione n e $k(t_1, \dots, t_n)$ è il campo delle funzioni razionali di X .

Problema 1.5. Quali sono le varietà algebriche unirazionali e quali quelle razionali?

In realtà tali proprietà sono, per così dire, molto particolari o poco diffuse in natura. Più precisamente esse sono soddisfatte da classi molto speciali di varietà. Le proprietà in questione sono invarianti per trasformazioni birazionali. Non sarà quindi troppo restrittivo limitare la discussione al caso delle varietà proiettive immerse in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}_k^r$.

Nello spazio ambiente $\mathbf{P}_k^r$ tali varietà si distribuiscono in famiglie, definite da opportuni caratteri numerici che individuano varie proprietà fondamentali dei membri della famiglia stessa. Un esempio semplicissimo a cui vogliamo fare riferimento è costituito dall'insieme

$$\sum_{i_0 + \dots + i_r = d} a_{i_0 \dots i_r} X_0^{i_0} \cdots X_r^{i_r} = 0,$$

di tutte le ipersuperfici di grado d dello spazio proiettivo $\mathbf{P}_k^r$.

Possiamo cominciare la rassegna dei problemi di unirazionalità e razionalità utilizzando proprio questo esempio.

Osservazione 1.6. Dalla successione esatta standard

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbf{P}^r}|_X \rightarrow N_X \rightarrow 0$$

e dal fatto che il fibrato normale di X sia $\mathcal{O}_X(d)$ segue che

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(d - r - 1).$$

Le varietà unirazionali di dimensione n sono prive di n -forme globali non nulle. Pertanto le ipersuperfici lisce che ci interessano devono avere grado

$$d \leq r$$

e queste ci limiteremo a studiare.

1.2. Razionalità e quadriche. Sia dunque X una ipersuperficie di grado $d = 2$. In questo caso la questione che ci interessa è ben conosciuta e risolta:

Proposition 1.7. X è razionale $\iff X$ è unirazionale $\iff X$ contiene un punto liscio.

L'esistenza di un punto $o \in X$ permette di costruire equazioni parametriche birazionali di X mediante la proiezione stereografica di centro o .

Se X contiene solo punti singolari non è razionale. Ad esempio:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

non è razionale su $\mathbb{Q}$.

1.3. Unirazionalità e cubiche. Passando a grado 3 la situazione diventa subito estremamente ardua e difficile.

Il problema della razionalità di una ipersuperficie cubica liscia di uno spazio proiettivo continua ad essere ben presente ed ha accompagnato la storia della geometria algebrica degli ultimi due secoli, dando spesso origine a risultati spettacolari.

Nel caso generale di un campo k qualsiasi anche il problema dell'unirazionalità di una cubica non è affatto semplice, ed ha una storia altrettanto interessante. La questione è stata completamente risolta da J. Kollar nel 2000.

Theorem 1.8. Sia X una ipersuperficie cubica di $\mathbf{P}_k^r$, liscia su k . Sia $r \geq 3$, allora

$$X \text{ è unirazionale} \iff X \text{ contiene un punto.}$$

La dimostrazione di Kollar, ([K1]), si basa, come lo stesso autore afferma, sull'analogo risultato provato nel 1943 da Beniamino Segre per $k = \mathbf{Q}$, nel caso di una superficie cubica ([S]). Quest'ultimo risultato fu in seguito variamente utilizzato ed esteso da Manin nel suo libro 'Cubic Forms', ([CF] II.2 e IV.8), e da Colliot-Thélène, Sansuc e Swinnerton-Dyer in ([CSS]). Vale la pena di riportare, a causa della sua semplicità e della sua eleganza, l'idea geometrica soggiacente alla dimostrazione di Beniamino Segre: nella sua possibilità di applicazione in dimensione qualsiasi.

Sia $k = \mathbf{Q}$ e sia $o \in X \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^r$. Il punto o ha coordinate razionali, per dimostrare che X è unirazionale si considera una retta generica l passante per o . l interseca la chiusura complessa $X_{\mathbf{C}}$ di X in due punti

$$u = (u_0 : \dots : u_r) \text{ e } \bar{u} = (\bar{u}_0 : \dots : \bar{u}_r)$$

tali che u_i e $\bar{u}_i$ sono numeri complessi coniugati. In particolare essi appartengono ad una stessa estensione quadratica L di $\mathbf{Q}$. Sia

$$X_L \subset \mathbf{P}_L^r$$

la chiusura di X su L e siano $H_u, H_{\bar{u}} \subset \mathbf{P}_L^r$ gli iperpiani tangenti a X_L rispettivamente in u e $\bar{u}$. Le sezioni iperpiane

$$S_u = H_u \cap X_L \text{ e } S_{\bar{u}} = H_{\bar{u}} \cap X_L$$

hanno allora un punto singolare rispettivamente in u e in $\bar{u}$. Al variare della retta l passante per o varia l'estensione L e la cubica X_L definita su L . Il punto essenziale è che l varia in modo sufficiente per poter dimostrare il seguente

Lemma 1.9. Sia $r \geq 3$: per una retta generica l le sezioni iperpiane S_u e $S_{\bar{u}}$ sono integre e hanno un punto doppio.

Osservazione 1.10. 'E il caso di osservare che l' esistenza di o non implica che per o passi una sezione lineare di X che sia integra e di molteplicit  2 in o . Se questa esistesse sempre non sarebbe necessario adottare il successivo argomento per concludere.

L 'involuzione di coniugio

$$j : X_L \rightarrow X_L$$

scambia S_u con $S_{\bar{u}}$ e u con $\bar{u}$. Come e' beno noto una cubica dotata di un punto doppio e' razionale, una mappa birazionale

$$f : L^{r-2} \rightarrow S_u$$

  molto semplicemente ottenuta considerando l' inversa della proiezione di S_u dal suo punto doppio u .

Sia $t \in L^{r-2}$, la retta congiungente $f(t)$ e $j \cdot f(t)$ interseca X_L in questi due punti ed in un terzo punto $\phi(t)$ che ammette coordinate razionali. In altri termini $\phi(t)$ appartiene a X . Ora L   uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{Q}$: quindi L^{r-2}   $\mathbf{Q}$ -isomorfo a $\mathbf{Q}^{2r-4}$ e pu  essere identificato con quest' ultimo. ϕ   una mappa razionale di variet  su $\mathbf{Q}$.

'E facile osservare che ϕ   dominante: sia $x \in X$ e sia $y \in S_u$. Allora la retta $\overline{xy}$ interseca $S_{\bar{u}}$ in un terzo punto $\bar{y} \in S_{\bar{u}}$, coniugato di y .

Conclusione:

Theorem 1.11. *Per $r \geq 3$ esiste una mappa razionale dominante $\phi : \mathbf{Q}^{2r-4} \rightarrow X$.*

Osservazione 1.12. Nello stesso articolo [K1] Kollar fa la seguente osservazione in merito alla nozione generale di unirazionalit :

'Unirationality of varieties is very poorly understood in general and there are very basic open questions. We do not even have a list of unirational surfaces and very few examples are known in higher dimensions.'

Osservazione 1.13. Kollar:

Theorem 1.14. *Le seguenti condizioni sono equivalenti per una cubica integra X , non necessariamente liscia, definita su un campo perfetto ¹:*

- 1 X   unirazionale su k .
- 2 X ha un punto definito su k .
- 3 X ha un punto liscio definito su k .

Kollar: su un campo non perfetto di caratteristica 3 esistono cubiche di dimensione qualsiasi non unirazionali e dotate di un punto razionale su k .

Kollar: 'I have not been able to find examples in *char* $k = 2$.

2 I criteri classici di razionalit .

'E giunto il momento, prima di approfondire ulteriormente l'esempio delle ipersuperfici, di richiamare sommariamente i principali capitoli di una storia ormai plurisecolare. Nel seguito di questo paragrafo supporremo

$$k = \mathbf{C},$$

salvo avviso del contrario. Lo studio dei problemi di razionalit  ed unirazionalit  si   sviluppato a partire dai casi di dimensione pi  bassa, considerando inizialmente

¹ cio  o di caratteristica zero o tale che la mappa di Frobenius   un isomorfismo

il caso delle curve, poi quello delle superfici e infine il caso delle varietà algebriche tridimensionali.

Il punto di partenza di questa vicenda é il classico teorema di Lüroth, valido su un campo arbitrario:

Theorem 1.15 (Lüroth 1876). *Sia X una curva algebrica irriducibile definita su k . Allora X è unirazionale se e solo se X è razionale.*

Proof. L' implicazione X razionale $\Rightarrow X$ unirazionale é ovvia. Viceversa sia $\phi : k \rightarrow X$ una parametrizzazione razionale. Assegnare una tale mappa ϕ equivale ad assegnare una estensione intermedia

$$k \subset L \subseteq k(T),$$

dove $L = k(X)$ e $k(T)$ é il campo delle funzioni razionali su k nella indeterminata T .

Dimostrare il teorema equivale dunque a dimostrare che ogni estensione intermedia L come sopra è una estensione semplice trascendente di k .

A tale scopo osserviamo per prima cosa che T è algebrico su L . Infatti L , contenendo propriamente k ed essendo contenuto in $k(T)$, ha grado di trascendenza 1 su k . Se T fosse trascendente su L allora $k(T)$ avrebbe grado di trascendenza 2 su k : assurdo. T è quindi radice di un polinomio monico irriducibile

$$f_0(Z) := Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_0 \in L[Z].$$

In particolare $a_0, \dots, a_{n-1} \in L \subset k(T)$ sono funzioni razionali di T . Moltiplicando per il minimo comune multiplo dei loro denominatori $b_n(T)$ otteniamo un polinomio

$$f(T, Z) := b_n(T)Z^n + b_{n-1}(T)Z^{n-1} + \cdots + b_0(T)$$

in Z, T , non divisibile per un polinomio in T di grado ≥ 1 . Il suo grado rispetto a Z è n per costruzione. Sia m il suo grado rispetto a T .

Non tutti i coefficienti a_i appartengono a k , perché in tal caso avremmo che T è algebrico su k . Avremo dunque per almeno un i :

$$a_i = \frac{b_i}{b_n}.$$

Riducendo ai minimi termini abbiamo

$$a_i = \frac{g(T)}{h(T)},$$

dove

$$0 \leq \deg h(T) < \deg g(T) \leq m.$$

Sostituendo T con Z otteniamo dunque un polinomio non nullo

$$g(Z) - a_i h(Z) \in L[Z]$$

di cui T è radice. Quindi $g(Z) - a_i h(Z)$ è divisibile per il polinomio, monico ed irriducibile, $f_0(Z)$, generatore in $L[Z]$ dell' ideale dei polinomi nulli su T . Ciò implica, per il lemma di Gauss, che

$$h(T)g(Z) - g(T)h(Z) = q(Z, T)f(Z, T).$$

A sinistra dell' uguaglianza il grado in T è $\leq m$. A destra lo stesso grado in T raggiunge m , essendo $\leq m$ a causa della uguaglianza ed essendoci il fattore $f(Z, T)$. Quindi $q(Z, T)$ non dipende da T . D' altra parte a sinistra non ci sono fattori non costanti appartenenti a $k[Z]$. Quindi $q(Z, T) := q \in k$. Ma allora $f(Z, T)$ é di grado

m in entrambe le variabili, perchè tale è $h(T)g(Z) - g(Z)h(T)$. Ora, per concludere, possiamo considerare i gradi di trascendenza delle estensioni

$$k \subset k(a_i) \subset L \subset k(T).$$

e possiamo calcolare i rispettivi gradi. Abbiamo:

$$[k(T) : L] = m = [k(T) : k(a_i)].$$

D'altra parte vale anche $[k(T) : L][L : k(a_i)] = [k(T) : k(a_i)]$. Quindi $[L : k(a_i)] = 1$ e $L = k(a_i)$. $\square$

Osservazione 1.16. La dimostrazione del teorema ci dice che la funzione razionale $a_i \in L = k(X)$ determina una mappa birazionale $a_i : X \rightarrow k$. La mappa inversa $\psi : k \rightarrow X$ è una parametrizzazione birazionale di X . Partendo da ϕ la dimostrazione del teorema di Lüroth ricostruisce dunque una ψ .

Sia ora k algebricamente chiuso, il seguente teorema può essere dimostrato per esercizio e come corollario:

Theorem 1.17. *Sia k algebricamente chiuso e sia X una curva definita su k . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1 X è unirazionale
- 2 X è razionale
- 3 X ha genere geometrico 0.

In dimensione 1 si verificano dunque due fenomeni particolarmente notevoli:

- l'unirazionalità equivale alla razionalità,
- l'unirazionalità equivale all'annullarsi di un invariante birazionale fondamentale della varietà: il genere geometrico.

Queste due osservazioni, a partire dall'epoca di Luroth, influenzeranno tutte le ricerche sui problemi di unirazionalità e razionalità in geometria algebrica. Ci sarebbe naturalmente molto da dire in merito, anche perché, come si è già osservato, si tratta di una storia ormai plurisecolare. Ci limiteremo, per ovvi motivi, a riportare alcuni passaggi fondamentali che saranno poi utili per descrivere il quadro attuale della situazione.

1.4. Il problema di Lüroth.

Anche in questo paragrafo supporremo $k = \mathbf{C}$, riservandoci osservazioni varie per gli altri casi.

Il teorema di Lüroth si può riproporre nel modo seguente:

Problema 1.18. :

- Sia X una varietà algebrica definita su un campo k :
 X unirazionale $\implies X$ razionale ?
- Sia $k = \mathbf{C}$, (oppure $k = \bar{k}$ e $\text{char } k = 0$):
 X unirazionale $\implies X$ razionale ?

Per almeno un secolo, a partire dal teorema di Lüroth, la geometria algebrica si è confrontata particolarmente con il secondo problema.

Un problema strettamente collegato a quest'ultimo era, in epoca classica, il seguente:

Problema 1.19. *Ottenere opportuni criteri di razionalità.*

In altre parole: studiare condizioni necessarie e sufficienti, sui caratteri numerici birazionalmente invarianti di X , affinché X sia razionale

Quest'ultimo problema è in qualche misura indeterminato, almeno fino a quando non si sia stabilito quali siano i caratteri numerici a cui si fa riferimento. Sia X una varietà complessa, compatta e connessa, di dimensione n . I caratteri numerici di X presi in considerazione dai geometri algebrici classici erano sostanzialmente i seguenti:

- il genere geometrico $p_g(X) = \dim H^0(\omega_X^{\otimes n})$ e cioè la dimensione dello spazio vettoriale
- I plurigeneri $P_r(X) = \dim H^0(\omega_X^{\otimes r})$ e cioè la dimensione dello spazio vettoriale degli r -tensori di n -forme olomorfe definiti su X .
- L'irregolarità $q(X) = \dim H^0(\Omega_X^1)$ cioè dimensione dello spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe definite su X .

I caratteri numerici considerati si annullano sia nel caso razionale che nel caso unirazionale:

Proposition 1.20. *Sia X/k proiettiva, irriducibile, liscia con $k = \mathbf{C}$:*

- X unirazionale $\implies p_g(X) = q(X) = P_r(X) = 0$.
- X razionalmente connessa $\implies p_g(X) = q(X) = P_r(X) = 0$.

Proof. X unirazionale $\implies$ esiste un morfismo suriettivo $f : P \rightarrow X$, dove P è liscio, completo e dotato di un morfismo birazionale $\sigma : P \rightarrow \mathbf{P}^n$, $n = \dim X$. In particolare il genere geometrico, l'irregolarità e i plurigeneri di P sono nulli. Sia τ un prodotto tensore di forme olomorfe definite globalmente su X . Supponiamo per assurdo che sia $\tau \neq 0$. Per il teorema delle funzioni implicite applicato a f , df è un isomorfismo su un aperto di Zariski $U \subset X$. Inoltre $\tau \neq 0 \implies \tau|_U \neq 0 \implies f^*\tau \neq 0$, il che è assurdo su P . Quindi $\tau = 0$. La dimostrazione è simile se X è razionalmente connessa. $\square$

Osservazione 1.21. La dimostrazione si basa sul teorema delle funzioni implicite applicato a f . Tale teorema vale se k è algebricamente chiuso e $\text{char } k = 0$. Inoltre vale per definizione di grado se $\deg f = 1$, cioè se X è razionale. Possiamo trarre, per ora, le seguenti conclusioni

- I plurigeneri e l'irregolarità sono nulli per ogni X razionale definita su un campo algebricamente chiuso k .
- I plurigeneri e l'irregolarità sono nulli per ogni X unirazionale definita su un campo algebricamente chiuso k , $\text{char } k = 0$.
- Sia $f : \mathbf{P}^n \rightarrow X$ razionale e dominante: se per f non vale il teorema delle funzioni implicite allora X potrebbe non essere razionale.

Siano X, Y varietà lisce e irriducibili definite su un campo algebricamente chiuso k di caratteristica $p > 0$. Un morfismo genericamente finito

$$f : Y \rightarrow X$$

si dice non separabile se l'estensione $f^* : k(X) \rightarrow k(Y)$ non è separabile. Ciò equivale a dire che non vale il teorema delle funzioni implicite per f : genericamente df non è invertibile. Discuteremo in seguito questa situazione, peculiare alla caratteristica positiva.

Il massimo successo raggiunto nella ricerca di un criterio di razionalità risale all'epoca di Guido Castelnuovo e riguarda le superfici algebriche:

Theorem 1.22 (Criterio di razionalità di Castelnuovo, 1892). *Sia X una superficie algebrica, liscia definita su un campo algebricamente chiuso: X è razionale $\iff$*

$$P_2(X) = q(X) = 0.$$

In particolare anche per una superficie algebrica complessa vale l'equivalenza: X unirazionale $\iff X$ razionale.

Osservazione 1.23. Riprendendo l'osservazione precedente possiamo chiederci se esistono, su k algebricamente chiuso di caratteristica $p > 0$, superfici unirazionali ma non razionali. La risposta è positiva e risale a Zariski (1958). *Superficie di Zariski*: seguente: sia, in caratteristica $p \geq 3$, $f : k^2 \rightarrow k^3$ la mappa definita da

$$x = u^{\frac{1}{p}}, y = t^{\frac{1}{p}}, z = -x^{\frac{p+1}{p}} - x^{\frac{p+1}{p}} + \frac{(u^{\frac{2}{p}} + t^{\frac{2}{p}})}{2}.$$

Allora l'immagine di f ha equazione

$$z^p + x^{p+1} + y^{p+1} - \frac{1}{2}(x^{\frac{2}{p}} + y^{\frac{2}{p}}).$$

Non si tratta di una superficie razionale, anche se è unirazionale. Tale superficie ammette la 2-forma non nulla

$$\omega = \frac{(dz \wedge dy)}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{(dz \wedge dy)}{x^p - x}$$

Superfici K3: una superficie K3 su $\mathbf{C}$ è una superficie con $q = 0$ e canonico triviale. Per $p = 3$ la superficie X è una quartica! Si tratta di una superficie K3 unirazionale. È stato provato da Michael Artin che ogni K3 unirazionale ha numero di Picard 22 cioè è tutti i suoi cicli sono algebrici. Si tratta di un esempio di K3 Shioda-supersingolare.

Osservazione 1.24. Il criterio di Castelnuovo vale su un campo algebricamente chiuso. Le sue possibili estensioni al caso di un campo k arbitrario sono state studiate specialmente da Manin ed Iskovskih, in relazione con il problema della razionalità di varietà algebriche tridimensionali dotate di un fascio di superfici razionali, (cfr. [I3], [M]). Non mancano naturalmente i contributi di autori classici al caso in cui k non è algebricamente chiuso. Tra i molti basti menzionare, oltre a Beniamino Segre, il nome di Annibale Comessatti per lo studio delle superfici algebriche reali. Un controesempio su $\mathbf{Q}$ è costituito dalla cubica:

$$3t^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Questa ammette, evidentemente, un punto razionale, quindi è unirazionale. Nello stesso tempo si può dimostrare che $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$. Per un noto teorema di Beniamino Segre ne segue che X non è razionale.

Osservazione 1.25. Nel contesto del criterio di Castelnuovo è il caso di ricordare come non valga l'implicazione

$$p_g(X) = q(X) = 0 \implies p_g(X) = P_2(X) = 0,$$

che in qualche misura ci si potrebbe aspettare. Fu Enriques nel 1896 a costruire un celebre esempio di superficie non razionale e tale che $p_g(X) = q(X) = 0$ e $P_2(X) = 1$. Si tratta delle superfici note oggi come superfici di Enriques, un cui modello birazionale e' rappresentato da uno sestica dello spazio proiettivo complesso passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, (cfr. [CD]):

$$QX_1X_2X_3X_4 + a(X_1^2X_2^2X_3^2)^2 + b(X_1^2X_2^2X_4^2)^2 + c(X_1^2X_3^2X_4^2)^2 + d(X_2^2X_3^2X_4^2)^2 = 0$$

Il criterio di razionalità di Castelnuovo rappresenta forse l'ultimo caso in cui i problemi di cui ci stiamo occupando appartengono ad un universo ordinato e preciso: esiste un criterio numerico di razionalità e il problema di Luroth ha risposta positiva. I problemi di razionalità e unirazionalità in dimensione tre e superiore rappresentano un sovvertimento del precedente ordine e in qualche modo apriranno la via ad un punto di vista un pó diverso basato sulla nozione di varietà razionalmente connessa che riconsidereremo tra poco. Preliminarmente é tuttavia opportuno proseguire con l'esempio delle ipersuperfici ed ancora con le cubiche.

2. CUBICHE: ESEMPI, STORIA, GEOMETRIA

2.1. Le superfici cubiche nel XIX secolo. Negli anni Sessanta del XIX secolo la teoria delle superfici cubiche si assesta nella sua fisionomia classica a vent'anni dalla nascita. $k = \mathbf{C}$:

- *'La dottrina delle superficie di terz'ordine ebbe due sorgenti indipendenti in Inghilterra ed in Germania.*²
- 1849: Cayley e Salmon³ provano che una superficie cubica liscia contiene esattamente 27 rette e 45 piani tritangenti.
- 1856: Steiner⁴ *Geometria sintetica delle superficie cubiche.*
- 1866: Luigi Cremona⁵ e Rudolf Sturm⁶ vincono il premio Steiner per le loro due celebri memorie sulle superfici cubiche.

La grande geometria classica sulla superficie cubica si sviluppa tra il 1840 e il 1870 su diversi temi ancora oggi fondamentali:⁷

- **Configurazione delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti.** Salmon - Cayley (1849).
- **Pentaedro di Sylvester** (1851). *Per una cubica generale S esiste un' unica quintupla di piani $\Pi_i = \{L_i = 0\}$, $i = 1 \dots 5$ tale che*

$$S = \left\{ \sum_{i=1 \dots 5} L_i^3 = 0 \right\}.$$

- **Double sixers di Schlaefli** (1854). $\exists$ 36 coppie di sestuple di rette a due a due sghembe su S la cui relazione di incidenza é $(1, 5)$:

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_6 \\ c_1 & \dots & c_6 \end{pmatrix}$$

Veniva studiata la **generazione proiettiva delle superfici cubiche**:

- **Collineazioni di tre reti di piani** (Grassmann 1855). *Al variare di $(\lambda : \mu : \nu) \in \mathbf{P}^2$ si considera il sistema di equazioni*

$$\lambda L_{11} + \mu L_{12} + \nu L_{13} = \lambda L_{21} + \mu L_{2,2} + \nu L_{21} = \lambda L_{31} + \mu L_{32} + \nu L_{33} = 0,$$

dove gli L_{ij} sono forme lineari su $\mathbf{P}^3$. Il luogo delle soluzioni é una

$$S = \{ \det (L_{ij}) = 0 \}.$$
⁸

- **Collineazioni di tre fasci di piani** (August 1862). *Una S generale contiene tre rette $a_i = \{L_i = M_i = 0\}_{i=1,2,3}$ a due a due sghembe. I fasci $\{\lambda_i L_i + \mu_i M_i = 0\} := \mathbf{P}^1$ definiscono una mappa birazionale*

$$\phi : \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1.$$

²G. Loria 'Il passato e il presente delle principali teorie geometriche' C. Clausen Ed. Torino (1907)

³On the triple Planes of Surfaces of the third order' Cambridge J. 1849

⁴Ueber die Flaechen drittes Grades' Comunicazione Acc. Berlino 31/1/1856. Journ f. Math. 1857

⁵Memoire de geometrie pure sur les surfaces du troisieme ordre' J. Liouville 68 (1868) 1-133

⁶Synthetische Untersuchungen ueber Flaechen Dritter Ordnung' Teubner (1867) Lipsia

⁷Cfr. I. Dolgachev 'Luigi Cremona and cubic surfaces', Luigi Cremona (1830-1903), Incontro di Studio 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan, (2005) 55-70.

⁸Esistono esattamente sei punti $P_i = (\lambda_i : \mu_i : \nu_i)$ tali che il sistema ha infinite soluzioni che formano una retta $p_i \subset S$, $i = 1 \dots 6$.

La restrizione ϕ/S è definita dalla mappa prodotto $\phi_1 \times \psi_2 \times \psi_3$, dove ψ_i è la mappa definita dal fascio di coniche su S

$$|h - a_i|,$$

dove $\mathcal{O}_S(h) \cong \mathcal{O}_S(1)$.⁹

- S è il luogo delle soluzioni simultanee $x \in \mathbf{P}^3$ di

$$\lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 = \lambda_2 L_2 + \mu_2 M_2 = \lambda_3 L_3 + \mu_3 M_3 = 0,$$

sotto la condizione $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0$.

Risale a Clebsch la **rappresentazione piana della superficie cubica**:

- **Rappresentazione piana (Clebsch 1866).** Una S generale è immagine della mappa razionale $\phi: \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3$ definita dal sistema lineare delle cubiche per sei punti $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$.
- **Razionalità di S .** $\phi: \mathbf{P}^2 \rightarrow S$ è birazionale, quindi S è razionale.
- **Rappresentazioni piane e double sixers.** $p_i := \phi(P_i)$ è una retta. Sia C_i la conica per i cinque punti diversi da P_i : anche $c_i := \phi(C_i)$ è una retta. Tali dodici rette formano una double sixer

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_6 \\ c_1 & \dots & c_6 \end{pmatrix}.$$

- **Equazione esaedrale di Cremona (1878).** Una double sixer equivale¹⁰ a una immersione lineare di $\mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^5$ tale che

$$S = \{a_0 X_0 + \dots + a_5 X_5 = X_0 + \dots + X_5 = X_0^3 + \dots + X_5^3 = 0\}$$

2.2. Moduli delle superfici cubiche.

- La ricchezza della geometria delle superfici permette di applicare in modo molto efficace la teoria degli invarianti allo spazio delle forme cubiche su $\mathbf{P}^3$.
- *Salmon e Clebsch (1860).* L'anello degli invarianti delle forme cubiche quaternarie è generato da invarianti di grado 8, 16, 24, 32, 40 e 100. L'ultimo soddisfa una equazione di grado due negli altri invarianti. In termini moderni vale il seguente:

Theorem 2.1. Sia $\mathbf{P}^{19}$ il sistema lineare delle superfici cubiche di $\mathbf{P}^3$. Il quoziente $\mathbf{P}^{19}/PGL(4)$ è, secondo la Geometric Invariant Theory, lo spazio proiettivo 4-dimensionale pesato

$$\mathbf{P}(1, 2, 3, 4, 5).$$

⁹Si provi che $(h - a_i)(h - a_j) = 1 - \delta_{ij}$. Se ne deduca che tale mappa è un morfismo genericamente iniettivo e che il grado della immagine di S è 6. Si deduca che $\phi(S)$ è una superficie di Del Pezzo di grado 6, ottenuta contraendo tre rette eccezionali disgiunte di S . Ma allora $\phi(S)$ è una sezione iperpiana di $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^7$. Cioè la sua equazione è una forma trilineare, il che vuol dire, scegliend opportunamente le coordinate, che $\phi(S) = \{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0\}$.

¹⁰modulo $PGL(6)$

2.3. Geometria italiana e cubiche: il Segre primal.

- Negli anni giovanili Corrado Segre é pienamente coinvolto negli studi sulle cubiche e nel circolo di idee da questi determinato.
- Il suo intervento, successivamente nel 1906, sulla generazione proiettiva delle cubiche ne é una prova.¹¹
- Cremona aveva dimostrato che la generazione proiettiva alla Grassmann era possibile per una cubica generale S .
- Cremona: la generazione proiettiva alla August, vera per una S generale, implica la generazione alla Grassmann.
- Corollario Una S generale é definita da $\det L = 0$, dove L é una matrice 3×3 di forme lineari.
- Segre precisa per via algebrica tale dimostrazione e anche la sua unica¹² eccezione: una S con punto doppio di tipo E_6 , cioè il suo anello locale nell'origine é isomorfo a quello della superficie¹³

$$z^2 + y^3 + z^4$$

Osservazione 2.2. 'E il caso di ricordare le singlaritá di Du Val per una superficie algebrica, cioè quelle che 'non impongono condizioni al sistema lineare canonico':

- A_n : $x^2 + y^2 + z^{n+1}$, $G = \mathbb{Z}_{n+1}$, $\mathbb{C}^2/G$.
Dynkin diagram A_n .
* — — — * — — — * $\cdots$ * — — — * (n+1 vertici *).
- D_n : $x^2 + y^2z + z^{n-1}$, $G =$ gruppo binario diedrale, $\mathbb{C}^2/G$.
Dynkin diagram D_n . * — — — * | — — — * — — — * $\cdots$ * (n vertici *).
- E_6 : $x^2 + y^3 + z^4$, $G =$ gruppo binario tetraedrale, $\mathbb{C}^2/G$.
Dynkin diagram E_6 . (* — — — * — — — * | — — — * — — — *)
- E_7 : $x^2 + y^3 + yz^3$, $G =$ gruppo binario ottaedrale, $\mathbb{C}^2/G$.
Dynkin diagram E_7 . (* — — — * — — — * | — — — * — — — * — — — *)
- E_8 : $x^2 + y^3 + z^5$, $G =$ gruppo binario icosaedrale, $\mathbb{C}^2/G$.
Dynkin diagram E_8 . (* — — — * — — — * | — — — * — — — * — — — * — — — *)

Corrado Segre: Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni.

- Appare naturale l' interesse per lo studio di ipersuperfici cubiche in dimensione superiore a fine XIX secolo.
- La 'Geometria degli spazi a quantesivogliono dimensioni' si afferma, o si é ormai affermata, come pratica corrente in quegli anni.
- Corrado Segre: 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario'
- La cubica di $\mathbf{P}^4$ con il massimo numero di ounti doppi porta oggi il suo nome: cubica di Segre o **Segre primal**.

Considereremo a piú riprese la cubica di Segre e la sua straordinaria geometria:

- L' equazione esaedrale di Cremona mostra che una superficie cubica generale é contenuta nel threefold S_6 -invariante

$$\mathbb{S} := \{y_0 + \cdots + y_5 = y_0^3 + \cdots + y_5^3 = 0\} \subset \mathbf{P}^5.$$

¹¹Lettera a Sturm. Pubblicata come 'Sur la generation projective des surfaces cubiques' Archive Math. u. Physik 10 (1906) 209-215

¹²La dimostrazione per via sintetica di Cremona non appariva chiara. Cfr. Sturm e a Reye

¹³Du Val singularities: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . Equivale: una risoluzione minimale non impone condizioni al canonico

- **La cubica di Segre** *é esattamente* $\mathbb{S}$. *Eliminando* y_5 ¹⁴ *si ha* ¹⁵

$$\mathbb{S} := \left\{ \sum_{0 \leq i < j < k \leq 4} 2x_i x_j x_k + \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j = 0 \right\} \subset \mathbf{P}^4.$$

- **Rappresentazione spaziale:** $\phi : \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^4$. $\phi(\mathbf{P}^3) = \mathbb{S}$. ϕ *é definita dal sistema lineare delle quadriche per* $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 \in \mathbf{P}^3$.
- **15 piani e 10 nodi.** *Nodi:* $\phi(E_{ij})$ *dove* E_{ij} *é la retta* $\langle O_i O_j \rangle$. *Piani:* $\phi(O_i)$ *e* $\phi(F_{ijk})$ *dove* F_{ijk} *é il piano* $\langle O_i O_j O_k \rangle$.

2.4. Ubiquitá del Segre primal.

- *L' ubiquitá di* V_o *é dovuta alla sua natura di varietà modulare. Molti e diversi sono i legami di* V_o *con i quozienti* $X_\Gamma = \Gamma|\mathcal{D}$: ¹⁶
- $\tilde{V}_o$ ¹⁷ *= GIT-quotient di* $(\mathbf{P}^1)^6 = \overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ *compattificazione di Deligne-Mumford di* $\mathcal{M}_{0,6}$.
- *Duale di* V_o *= quartica di Igusa in* $\mathbf{P}^{4*} = \overline{\mathcal{A}}_2^{(2)}$, *compattificazione moduli delle curve di genere 2 con struttura di livello 2.*
- V_o *=* *compattificazione dei moduli delle curve di genere 4 con moltiplicazione per* $e^{\frac{i\pi}{3}}$.
- *Hessiana di* V_o *= threefold modulare quintico di Barth-Nieto, compactificazione dei moduli delle superfici abeliane di tipo* $(1,3)$. ¹⁸

¹⁴ponendo $x_0 = y_0, \dots, x_4 = y_4, -y_5 = x_0 + \dots + x_4$

¹⁵Su qualunque campo K con $\text{char } K \neq 2$

¹⁶ $\mathcal{D}$ *é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico:* B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.

¹⁷ $\tilde{V}_o$:= blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari

¹⁸e ulteriore struttura.

3. CUBIC THREEFOLDS E NON RAZIONALITÀ

3.1. Riassunto. In questa sezione, salvo avviso del contrario, V é una cubica liscia in $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$. L' unirazionalità di V era ben nota classicamente: Noether la conosceva, provata da Corrado Segre, Marletta (in generale?), Snyder.

Poiché l' irregolarità e i plurigeneri di V sono nulli V era un candidato naturale come controesempio al problema di Lüroth.

Fano si occupó di questo tema per tutta la vita e diede diverse dimostrazioni, non soddisfacenti dal punto di vista moderno ma di grandissimo interesse.

L' idea di fondo é quella di distinguere $\mathbf{P}^3$ da V mediante la prova che non esistono certi sistemi lineari di superficie su V , che invece su $\mathbf{P}^3$ esistono.

Questo approccio deve necessariamente basarsi su una conoscenza adeguata delle trasformazioni birazionali di V . Questi metodi si applicano piú in generale ad altri threefolds di Fano. Alcuni aspetti:

- $Cr(\mathbf{P}^3) \not\cong Bir(V)$ implica V non razionale.
- Fano: un modello birazionale di un threefold razionale contiene sistemi lineari big e nef di superfici razionali D tali che $D^3 > 3$.
- Fano: studiare i sistemi lineari di superfici K3 singolari su V .
- Provare che nessun sistema lineare di superfici K3 singolari di $\mathbf{P}^3$ é pull-back di uno dei precedenti mediante una mappa birazionale.
- Fano: V é birazionale alla V_{14}^3 e quest' ultima non é razionale per i motivi precedenti.
- **Non razionalità di ogni V liscia.**
Clemens e Griffiths 1972: il metodo coinvolge la teoria di Hodge di V e la geometria delle rette di V .
- Una variazione si fonderá sulla teoria delle varietà di Prym, (Mumford, Murre).
- Un risultato piú debole, e cioè la **non razionalità di una cubica generale** $V \subset \mathbf{P}^4$, si può ottenere per degenerazione.
- Si applica lo stesso metodo a limiti singolari V_o di una V generale. Collino, poi Bardelli, per primi hanno usato **degenerazioni di V** .
- Infine T. Gwena 2004: considera una famiglia $\{V_t, t \in T\}$ il cui limite é $V_o =$ é la cubica di Segre.
- **Metodo di Clemens-Griffiths:**
- Decomposizione di Hodge della coomologia complessa di V : $h^{3,0} = h^{0,3} = 0$ e $h^{1,2} = h^{2,1} = 5$, quindi

$$H^3(V, \mathbf{C}) \cong H^{1,2}(V, \mathbf{C}) \oplus H^{2,1}(V, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^5 \oplus \mathbf{C}^5.$$

- Mappa di Abel-Jacobi: $H_3(V, \mathbb{Z}) \subset H^{1,2}(V, \mathbf{C})^*$. Si considera

$$J(V) := H^{12*}(V, \mathbf{C})^* / H_3(V, \mathbb{Z}) = \text{Jacobiana intermedia di } V$$

- $J(V) \neq$ prodotto di Jacobiane di curve $\Rightarrow V$ non é razionale.

3.2. Cubic Threefolds: teoria di Hodge e non razionalità. Sia $V \subset \mathbf{P}^4$ una ipersuperficie cubica liscia definita su $\mathbf{C}$. Cominciamo ad esaminare la teoria di Hodge collegata a V . La successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0$$

determina immediatamente la coomologia di V : Basta applicare la dualità di Serre e il teorema di Bott a $\mathbf{P}^4$ per ottenere

$$h^1(\mathcal{O}_V) = 0, \quad h^2(\mathcal{O}_V) = 0, \quad h^3(\mathcal{O}_V) = 0.$$

Il teorema di Lefschetz, nella sua versione debole, ci dice poi che

$$H^i(V, \mathbb{Z}) \cong H^i(\mathbf{P}^4, \mathbb{Z}), \quad i < \dim V.$$

La dualità di Poincaré implica gli stessi isomorfismi per $i > \dim V$. Dalla successione esatta

$$0 \rightarrow T_V \rightarrow T_{\mathbf{P}^4} \rightarrow \mathcal{O}_V(3) \rightarrow 0$$

possiamo inoltre calcolare la caratteristica topologica $c_3(T_V)$ di V . Possiamo quindi concludere che il cosiddetto *diamante di Hodge* di V è il seguente:

$$b_0(V) = b_6(V) = 1, \quad b_1(V) = b_5(V) = 0, \quad b_2(V) = b_4(V) = 1, \quad b_3(V) = 10.$$

Ricordiamo ora la definizione di *struttura di Hodge*. Sia $H_{\mathbb{Z}}$ un gruppo abeliano libero¹⁹, la complessificazione

$$H = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$$

è uno spazio vettoriale complesso. Per ogni suo elemento $v = \sum g_i \otimes z_i$ è ben definito l'elemento coniugato $\bar{v} := \sum g_i \otimes \bar{z}_i$. In particolare H è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e il passaggio al coniugato definisce una involuzione di tale spazio

$$\iota : H \rightarrow H.$$

Sia $S \subseteq H$, porremo $\bar{S} := \iota(S)$.

Definizione 3.1. Si dice *struttura di Hodge su H di peso n* una decomposizione

$$H := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

di $H_{\mathbb{Z}}$ tale che $\bar{H}^{p,q} = H^{q,p}$.

Su una struttura di Hodge $(H_{\mathbb{Z}}, H)$ si possono definire diverse polarizzazioni:

Definizione 3.2. Una *polarizzazione Q su $(H_{\mathbb{Z}}, H)$* è una forma bilineare intera $Q : H_{\mathbb{Z}} \otimes H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che

- $Q(\alpha, \beta) = (-1)^n Q(\beta, \alpha)$, (*simmetrica n pari, antisimmetrica n dispari*).
- $Q(\alpha, \beta) = 0$ se $\alpha \in H^{p,q}$, $\beta \in H^{p',q'}$ e $p + p' \neq n$.
- $i^{p-q} Q(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$ for $\alpha \neq 0$.

Tale forma Q è non degenere.²⁰ Q si definisce *unimodulare* se la mappa indotta

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Hom}(H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z})$$

è un isomorfismo. Equivalentemente, se A è la matrice di Q rispetto a una base di $H_{\mathbb{Z}}$, si ha $\det A = \pm 1$.

Definizione 3.3. La *filtrazione di Hodge di $(H_{\mathbb{Z}}, H)$* è così definita:

$$F^p H = \bigoplus_{i \geq p} H^{i, n-i}.$$

¹⁹l'esempio tipico è un gruppo di coomologia a coefficienti interi di uno spazio topologico modulo la parte di torsione.

²⁰a causa dell'ultima condizione la sua restrizione $Q_{p,q}$ a $H^{p,q} \oplus H^{q,p}$ è non degenere. La penultima condizione implica che Q sia somma diretta delle $Q_{p,q}$. Quindi Q è non degenere.

Si ha

$$H^{n,0} = F^n H \subseteq F^{n-1} H \subseteq \dots \subseteq F^0 H = H.$$

I gruppi di coomologia di una varietà proiettiva irriducibile, liscia V di dimensione n sono dotati della decomposizione di Hodge. Senza entrare qui nella massima generalità possiamo osservare che il cup product definisce una forma bilineare

$$\cup : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

dove possiamo porre $H_{\mathbb{Z}} := H(V, \mathbb{Z})/Tors$. Per il teorema di dualità di Poincaré il cup product definisce un isomorfismo di reticoli

$$f_{\cup} : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow Hom(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}).$$

In termini equivalenti ciò vuol dire che $\cup$ é *unimodulare*. Il determinante di una matrice di intersezione di $\cup$ é ± 1 . Vediamo gli esempi che ci interesseranno.

Esempio 3.4. Curve. Sia C una curva liscia, irriducibile di genere g . Sia $H^1(C, \mathbb{Z}) := H_{\mathbb{Z}}$. La decomposizione di Hodge definisce una struttura di Hodge di peso 1. $H^{1,0} = H^0(\omega_C) =$ forme olomorfe. $H^{0,1} =$ forme antiolomorfe. L'integrazione o cup product, modulo identificazioni canoniche,

$$Q(\alpha, \beta) = \int_C \alpha \wedge \bar{\beta}$$

Q determina una identificazione $H^0(\omega_C)^* = H^{0,1}$. Inoltre sappiamo che l'integrazione definisce un funzionale lineare

$$f_{[\gamma]} : H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\omega_C)^* = H^{1,0}, \quad (f_{[\gamma]}(\omega) := \int_{\gamma} \omega,$$

per ogni $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$. La mappa indotta $j : H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{1,0}$ ha come immagine esattamente la proiezione ortogonale di $H^1(C, \mathbb{Z})$ in $H^{0,1}$. Si tratta di un reticolo e la costruzione determina un toro complesso di dimensione g :

$$J(C) := H^0(\omega_C)^* / J(H_1(C, \mathbb{Z})) = H^{0,1} / H^1(C, \mathbb{Z}).$$

Senza per il momento entrare nel merito Q definisce su $J(C)$ un fibrato lineare ampio: $\mathcal{O}_{J(C)}(\Theta) \in Pic J(C)$. Q é infatti un elemento di

$$H^2(J(C), \mathbb{Z}) = \wedge^2 H^1(C, \mathbb{Z}).$$

Le condizioni che appaiono nella defibizione di struttura di Hodge polarizzata caratterizzano gli elementi della coomologia che sono la prima classe di Chern di un fibrato ampio. La seguente coppia é ben nota:

Definizione 3.5. $(J(C), \mathcal{O}_{J(C)}(\Theta))$ é la **Jacobiana** della curva C .

Si tratta di un esempio, forse il piú importante, di varietà abeliana principalmente polarizzata di dimensione g .

Esempio 3.6. Superfici K3. In questo caso la situazione, dimensione pari, non produce un toro complesso principalmente polarizzato. Sia S una superficie K3 liscia, consideriamo anche in questo caso la sua coomologia intermedia: $H^2(S, \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$. Abbiamo

$$H^{2,0} = \mathbb{C}[\omega], \quad H^{0,2} = \mathbb{C}[\bar{\omega}], \quad H^{1,1} \cong \mathbb{C}^{20}$$

Inoltre $h^{2,0} = h^{0,2}$ e $h^{1,1}$. Il cup product definisce su $H_{\mathbb{Z}} = H^2(S, \mathbb{Z})$ una forma bilineare simmetrica intera e unimodulare Q . Tutte le K3 sono diffeomorfe e Q , oltre

ad essere unimodulare, risulta essere pari di segnatura $(3, 19)$. La parità si può dedurre dai seguenti fatti:

- *Le K3 sono tutte diffeomorfe.*
- *La quartica F di Fermat $X^4 + Y^4 + Z^4 = T^4$ ha numero di Picard 20.*
- *Quindi Q su $H^2(F, \mathbb{Z})$ è pari di segnatura $(3, 19)$.*
- *Dal teorema di Milnor di classificazione dei reticoli unimodulari pari:*

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \cong E_8(-1)^{\oplus 3} \oplus U^{\oplus 2}.$$

dove U è un piano iperbolico.

Non esiste, in questo esempio di dimensione pari, un modo semplice di associare a S , dopo la sua struttura di Hodge, un toro complesso come la Jacobiana di una curva. Una costruzione più complicata deriva dalla teoria di Kuga-Satake. È possibile tuttavia costruire uno spazio per le strutture di Hodge che includono tutte le strutture di Hodge determinate dalla coomologia intermedia di una K3: spazio dei periodi delle superfici K3, 20-dimensionale.

Esempio 3.7. Cubic fourfolds. Sia $X \subset \mathbb{P}^5$ un'ipersuperficie cubica liscia. In questo caso la coomologia intermedia ha dimensione 21: $H^4(X, \mathbb{Z})$ è un reticolo unimodulare di rango 21. La struttura di Hodge di peso 4 di X è determinata da $H^4(X, \mathbb{Z})$ e da

$$H^4(X, \mathbb{C}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2} \oplus H^{1,3}.$$

Inoltre $h^{3,1} = h^{1,3} = 1$ e $h^{2,2} = 19$. $H^2(X, \mathbb{Z})$ ha segnatura $(2, 20)$. Per una K3 abbiamo $H^2(S, \mathbb{Z})$ di segnatura $(3, 19)$.

Esempio 3.8. Cubic fourfolds e superfici K3. Ora possiamo notare quanto segue: sia S generale e quindi tale che $\text{Pic } S \cong \mathbb{Z}[h]$, h ampio. Il reticolo trascendente, o primitivo, di S è

$$h^\perp \subset H^2(S, \mathbb{Z})$$

di segnatura $(2, 19)$.

- *Esiste un sottoreticolo naturale di $H^2(X, \mathbb{Z})$ di segnatura $(2, 19)$?*
- *Esiste una relazione con le K3?*

Per X generica $NS^2(X)$ ha rango uno ed è generato dalla classe h^2 . Sia X speciale di reticolo $NS^2(X)$ di segnatura $(1, 1)$. Allora

$$NS^2(X)^\perp \subset H^4(X, \mathbb{Z})$$

ha segnatura $(2, 19)$.

Congettura 3.9. X è razionale se e solo se $NS^2(X)^\perp$ è il reticolo di una superficie K3 S . In questo caso ci si aspetta che esista una mappa birazionale

$$\sigma : X \rightarrow \mathbb{P}^4$$

tale che σ^{-1} ha come luogo di indeterminazione una superficie K3 singolare $\overline{S} \subset \mathbb{P}^4$.

Concentriamoci infine su un cubic threefold V : in questo caso $b_3 = 10$ e $H_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^{10}$. Passando alla coomologia complessa abbiamo

$$H := H^3(V, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3}.$$

Il cup product si estende a una forma bilineare

$$Q : H \times H \rightarrow \mathbb{C}.$$

Precisamente

$$H(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta.$$

Q é una polarizzazione sulla struttura di Hodge $(H_{\mathbb{Z}}, H)$. Notiamo che, non solo nel caso di un cubic threefold, abbiamo

- $\int_V \alpha \wedge \beta = -\int_V \beta \wedge \alpha$
- $\int_V \alpha \wedge \beta = 0$ se α é di tipo p, q , β di tipo p', q' e $p + p' \neq 3$.
- $\int_V \alpha \wedge \bar{\alpha} > 0$ se α non é nulla.

Possiamo anche osservare che $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ é una forma reale definita positiva per costruzione, se $\alpha \neq 0$. Notiamo inoltre che il prodotto tensore determina una inclusione naturale

$$H_{\mathbb{Z}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes 1 \subset H.$$

$H_{\mathbb{Z}}$ ha rango 10. Lo spazio vettoriale $F := F^2 H = H^{2,1} \oplus H^{3,0}$ é uno spazio vettoriale complesso di dimensione 5. Abbiamo

$$H = F \oplus \bar{F}.$$

Proposition 3.10. *La proiezione di $H_{\mathbb{Z}}$ in F é un reticolo di rango massimo in F come spazio vettoriale reale.*

In questa situazione, come in tutte le altre situazioni analoghe che ora non consideriamo, otteniamo un toro complesso

$$JV := F/H.$$

Nel caso in questione JV é un toro complesso di dimensione 5.²¹ La Jacobiana intermedia JV

Osservazione 3.11. Polarizzazione su una Jacobiana intermedia. Su un toro complesso di dimensione g :

$$T := E/L$$

é ovviamente possibile considerare la coomologia complessa e in particolare $H^2(T, \mathbb{Z}) \subset H^2(T, \mathbb{Z}) = \wedge^2 E$. L'esistenza su T di una forma di tipo $(1,1)$ che definisca un line bundle positivo in $H^2(T, \mathbb{Z})$ é equivalente alla esistenza di una forma bilineare antisimmetrica

$$P : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$$

soddisfacente alle seguenti proprietà: sia $dx_1 \dots dx_{2g}$ una base del reticolo L e sia $dz_1 \dots dz_g$ una base di E . Allora

$$dz_1 \dots dz_g \, d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_g$$

é una base di E come spazio vettoriale reale. Possiamo scrivere la *matrice dei periodi* di L in E : si tratta della matrice

$$(\Pi \, \bar{\Pi})$$

del cambiamento di base dalla base reale $dx_1 \dots dx_{2g}$ all'altra. Le *condizioni di Riemann* ci dicono che P definisce la classe di un line bundle ampio su T se e solo se

- ${}^t \Pi P \Pi = 0$

²¹La stessa costruzione si realizza per ogni varietà liscia dispari X di dimensione n a partire da $H^n(\mathbb{X})$. Il risultato della costruzione

$$JX = F/H$$

si chiama *Jacobiana intermedia* di X . Non sempre si tratta di un toro dotato di fibrato lineare ampio. Ciò vale, per un threefold X , se questo ha $p_g(X) = 0$ cioè se $p_g(X) = 0$.

- $-i^t \Pi P \bar{\Pi} > 0$.

La scelta di P a valori interi ci dice che P appartiene a $H^2(T, \mathbb{Z})$. La prima condizione ci dice che P appartiene a $H^{1,1}$ la seconda ci dice infine che P è una class ampia.

Lemma 3.12 (Frobenius). *Esiste una base di L tale che, rispetto a tale base, la matrice di P è*

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$$

dove δ indica la matrice diagonale $g \times g$ tale che sulla diagonale i termini sono $d_1 \dots d_g$ e ognuno divide il successivo.

P definisce una polarizzazione sulla struttura di Hodge di peso 1 di T .

Definizione 3.13. P si dice polarizzazione principale su T se $\delta = I$.

3.3. Jacobiane intermedie e non razionalità di V . Torniamo alla cubica liscia $V \subset \mathbb{P}^4$.

Proposition 3.14. *La polarizzazione $Q : H^3(V, \mathbb{Z}) \times H^3(V, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ è una polarizzazione principale su JV .*

Conclusione: JV è una varietà abeliana principalmente polarizzata di dimensione 5.

3.4. JV e la superficie delle rette di V .

3.5. JV e le Jacobiane di curve di genere cinque.

3.6. Non razionalità di V . ALESSANDRO VERRA: DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, ROMA TRE, ROME, ITALY

E-mail address: verrea@mat.uniroma3.it