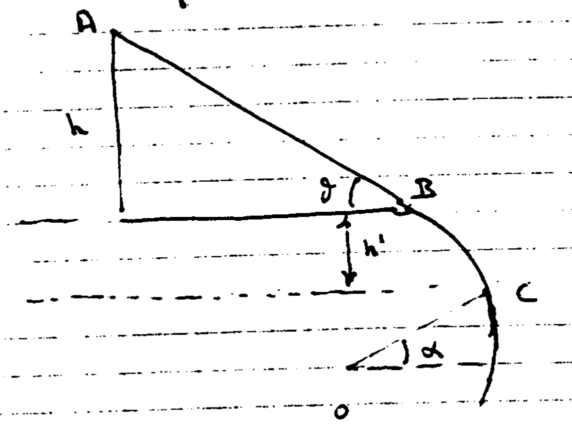
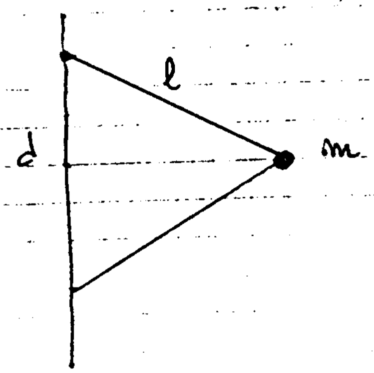
20° Un punto materiale parte dalla posizione A di un piano inclinato avente $\mu = 0.2$ da fermo. Nel punto B il piano è raccordato con una guida circolare avente raggio $R = 1$ m priva di attrito. Sapendo che l'angolo di inclinazione del piano è $\theta = 30°$, calcolare l'altezza h rispetto all' ~~orizzontale passante per B)~~ ~~del piano per~~ cui il punto materiale si stacca nel punto C della guida in corrispondenza di un angolo $\alpha = 60°$



21 _ Una massa $m = 1.34$ kg è fissata ad una sbarra verticale per mezzo di due fili lunghi $l = 1.70$ m fissati alla sbarra ad una distanza $d = 1.7$ m. Il sistema ruota attorno alla sbarra in modo da formare un triangolo equilatero; sapendo che la tensione del filo più alto è $T_1 = 35$ N, calcolare T_2, la risultante delle forze e la velocità della massa m.



SOLUZIONI

– Teorema delle forze vive e conservazione dell'energia meccanica.

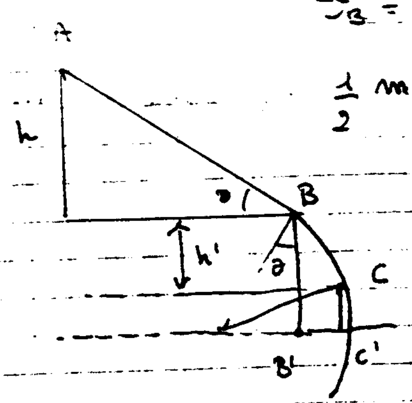
$$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + \mu mg \cos\vartheta \cdot l \qquad l = \frac{h}{\operatorname{sen}\vartheta}$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + U_B$$

$$U_B = mgh'$$

$$U_B = mgR(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mgh - mg\mu h \cot g\,\vartheta + mgR(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha)$$



$$\begin{cases} BB' = R\cos\vartheta \\ CC' = R\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$h' = BB' - CC'$$

Nel punto C l'equazione del moto (circolare non uniforme) è:

$$mg\operatorname{sen}\alpha - N = m\frac{v_C^2}{R}$$

La condizione di distacco è: $N = 0$:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \frac{2}{R}\left\{ mgh(1 - \mu\cot g\,\vartheta) + mgR(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha)\right\}$$

$$h = \frac{g\operatorname{sen}\alpha - 2g(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha)}{\frac{2}{R} g(1 - \mu\cot g\,\vartheta)} = 0.78 \text{ m}$$

– L'equazione del moto di m è:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_N$$

$$\begin{cases} T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha - mg = 0 \\ T_1\operatorname{sen}\alpha + T_2\operatorname{sen}\alpha = mv^2/R \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\alpha = 1/2 \\ R = l \end{cases}$$

$$T_2 = T_1 - 2mg = 8.74 \text{ N}$$

$$v = \left\{ \frac{l}{m}(T_1\operatorname{sen}\alpha + T_2\operatorname{sen}\alpha)\right\}^{1/2} =$$

22 Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 40$ cm e per $t=0$ si ha $v_0 = 2$ m/sec; dopo un giro si ha $v_1 = 0.3$ m/sec. e tale diminuzione della velocità è dovuta ad una forza d'attrito costante. Calcolare l'accelerazione normale dopo 0.5 giri ed il tempo impiegato a percorrere un giro. Calcolare inoltre il coefficiente d'attrito.

23 Un punto materiale viene lasciato andare da fermo dalla sommità di una superficie cilindrica di raggio R priva di attrito. Calcolare la reazione normale del cilindro per un angolo $\alpha < \alpha_0$ essendo α_0 l'angolo in cui avviene il distacco e calcolare α_0

SOLUZIONI

— Moto circolare uniformemente decelerato:

$$\begin{cases} 2\pi R = -\frac{1}{2} a_t T^2 + v_0 T \\ v_1 = -a_t T + v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_t = \frac{v_0^2 - v_1^2}{4\pi R} = 0.78 \text{ m/sec}^2 \\ T = \frac{v_0 - v_1}{a_t} = 2.18 \text{ sec.} \end{cases}$$

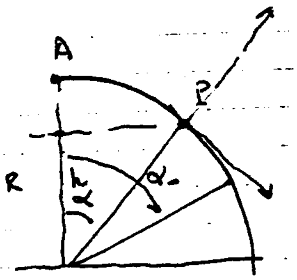
essendo T il periodo del moto.

La velocità tangenziale dopo 1/2 giro è:

$$v_1'^2 = v_0^2 - 2\pi R a_t = 1.43 \text{ m/sec.}$$

$$a_n = v_1'^2/R = 5.11 \text{ m/sec}^2.$$

$$F_A = m a_t \rightarrow \mu m g = m a_t \rightarrow \mu = a_t/g = 0.02$$

— 

Equazioni del moto:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} -mg\cos\alpha + N = -m v_P^2/R \\ mg \sin\alpha = m a_t \end{cases}$$

Dalla conservazione dell'energia ricavo la velocità tangenziale in P

$$mgR = mgh + \frac{1}{2} m v_P^2 \qquad h = R\cos\alpha$$

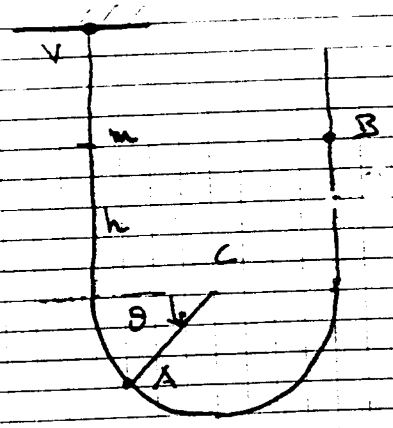
quindi

$$N = mg\,(3\cos\alpha - 2)$$

La condizione di distacco è $N = 0$ per cui

$$\cos\alpha_0 = 2/3 \qquad \alpha_0 = 48^\circ.2$$

24. Una massa $m = 0.5$ Kg può scorrere lungo una guida rigida sagomata come indicato in figura in cui un suo estremo è vincolato ad una parete orizzontale mentre l'altro è libero. Sapendo che m cade da un'altezza $h = 1.5$ m calcolare la reazione vincolare nel punto V di sostegno della guida quando m passa per i punti A e B della guida, sapendo che $CA = 0.2$ m e $\vartheta = 20°$.



25. Un astronauta sbarcato sulla Luna spara un proiettile con velocità iniziale v tangente alla linea equatoriale. Egli osserva che il proiettile è dotato di una accelerazione diretta verso il centro della Luna di modulo $g_0 = 1.67$ m/sec² sapendo che l'accelerazione misurata al Polo Nord lunare è $g_l = 1.63$ m/sec² che il raggio della Luna è 1740 Km e la sua velocità di rotazione è $\omega = 2.7 \cdot 10^{-6}$ rad/sec, calcolare la velocità iniziale v del proiettile.

26. Un disco di raggio $R = 15$ cm ruota con velocità angolare $\omega = 20$ rad/sec attorno al suo asse che a sua volta precede con velocità angolare $\Omega = 2$ rad/sec attorno ad un altro asse con il quale forma un angolo $\vartheta = 30°$. Calcolare il valore delle velocità assolute dei due punti del bordo del disco che si trovano nel piano cui appartengono i due assi di rotazione.

$\vec{R}_v = \vec{R}_N$

Nel punto A avremo

$R_N = mg \operatorname{sen}\theta + m v_A^2/R$ con

$\frac{1}{2} m v_A^2 = mg(h - R \operatorname{sen}\theta) \rightarrow v_A^2 = 2g(h - R\operatorname{sen}\theta) = 40 \, (m/sec)^2$

$R_A = 102 \, N$

In B : $R_N = 0 \rightarrow R_v = 0$

Avremo:

$\vec{g}_0 = \vec{g} - \vec{a}_t - \vec{a}_c \rightarrow g_0 = g_e - \omega^2 R - 2\omega \wedge v$

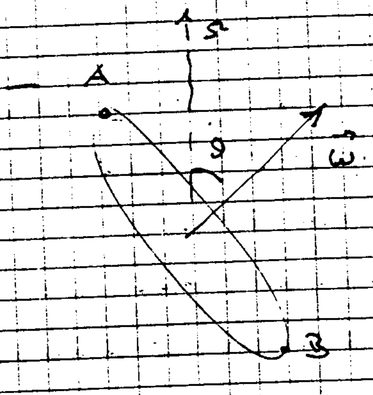
ed osservando che $g_0 > g_e$ ne viene che l'accelerazione di Coriolis

deve essere positiva ossia

$g_0 = g_e - \omega^2 R + 2\omega v \rightarrow v = (g_0 - g_e + \omega^2 R)/2\omega =$

$= 6050 \, m/sec$

con $\vec{v}$ diretta in verso opposto alla velocità di trascinamento



Le velocità sono normali al piano $\omega \Omega$ ed opposte. Avremo:

$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_r$

$v_t = \Omega R \cos\theta$; $v_r = \omega R$

$v = (\Omega \cos\theta + \omega) R = 3.15 \, m/sec.$

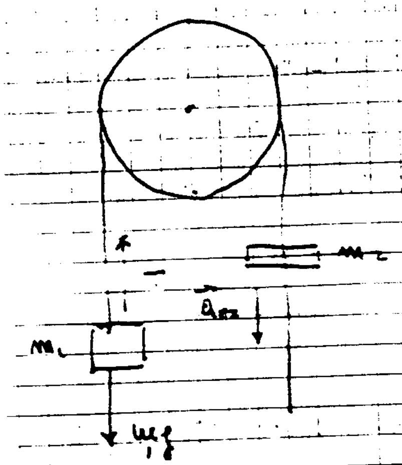
27. Un filo inestensibile passa sopra una carrucola in grado di ruotare attorno al suo asse orizzontale. Ad una estremità del filo è fissata una massa $m_1 = 2\,Kg$ mentre all'altra estremità è infilato, nel foro centrale di un disco $m_2 = 0.4\,Kg$ e può scorrere con attrito. Il sistema inizialmente in quiete viene abbandonato ed il disco cade con accelerazione $a_{r2} = 14\,m/sec^2$ rispetto al filo che durante tutto il moto si mantiene teso. Calcolare

1) l'accelerazione con cui cade m_1 e la forza di attrito F_A tra il filo ed il disco
2) l'energia meccanica dissipata allorché il disco è caduto di 1 m.

28. Un satellite di massa $M = 200\,Kg$ ruota attorno alla Terra su una orbita circolare ad una altezza $h_1 = 100\,Km$ dal suolo. Calcolare il lavoro fatto dai razzi allorché il satellite si porta su una orbita circolare ad $h_2 = 200\,Km$ dal suolo. ($R_T = 6.4 \cdot 10^{6}\,m$; $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/Kg^2$; $M_T = 6 \cdot 10^{24}\,Kg$)

29. Una molla è posta verticalmente su di un tavolo. Poggiandovi un oggetto di massa m essa si comprime di un tratto $x_1 = 5\,mm$. Successivamente, comprimendola ulteriormente di un tratto $x_2 = 3\,cm$, essa viene lasciata libera. Calcolare la durata del volo della massa m dall'istante in cui viene rilasciata a quello in cui essa torna nella posizione iniziale.

Le equazioni del moto sono:



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - T = m_2 a_2 \end{cases} \qquad T = F_A$$

con $a_2 = a_{r2} - a_1$

$$(m_1 - m_2) g = m_1 a_1 - m_2 (a_{r2} - a_1)$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2) g + m_2 a_{r2}}{(m_1 + m_2)} = 8.87\ m/s^2$$

a)
$$a_2 = 5.13\ m/sec^2$$

$$F_A = T = m_1 (a_1 - g) = 1.87\ N$$

b) $$L_A = -E_f = -(m_1 g h_1 - m_2 g h_2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$(h_2 = 1m)$ $$h_2 = \frac{1}{2} a_2 \tau^2 \rightarrow \tau = \left(\frac{2h_2}{a_2}\right)^{1/2} \rightarrow v_2 = a_2 \tau = \sqrt{2 a_2 h_2} = 3.2\ m/sec.$$

$$h_1 = \frac{1}{2} a_1 \tau^2 = 1.73\ m \Rightarrow v_1 = a_1 \tau = \sqrt{2 a_1 h_1} = 5.54\ m/sec.$$

$$L_A = -5.1\ J.$$

— Applichiamo il Teorema delle forze vive

$$L = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2)$$ essendo

$$\gamma \frac{M_T M}{r_1^2} = \frac{M v_1^2}{r_1} \qquad \text{con } r_1 = R_T + h_1$$

$$\gamma \frac{M_T M}{r_2^2} = \frac{M v_2^2}{r_2} \qquad \text{con } r_2 = R_T + h_2$$

$$L = \frac{1}{2} \gamma M_T M \left(\frac{1}{R_T + h_2} - \frac{1}{R_T + h_1}\right)$$

— Applichiamo il principio di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg (x_1 + x_2)$$

con: $k x_1 = mg$ $$\Rightarrow v_0^2 = \frac{g}{x_1} (x_2^2 - x_1^2)$$

$$\tau = 2 \frac{v_0}{g} = 2 \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{g x_1}\right)^{1/2} = 0.27\ sec.$$

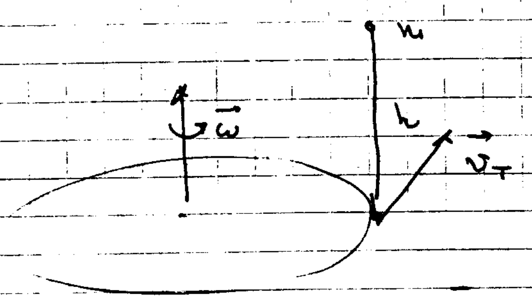
30 Una giostra di raggio $R = 1\,m$ ruota con velocità costante $\omega = 1$ rad/sec; un corpo di massa $m = 2\,Kg$ viene fatto cadere da un'altezza h sulla perpendicolare al bordo del disco. Calcolare rispetto ad un osservatore solidale alla giostra:

a) l'accelerazione di Coriolis al momento dell'impatto

b) il modulo dell'accelerazione relativa allo stesso istante.

31 Una piattaforma orizzontale ruota con velocità costante $\omega = 1.5$ rad/sec ed ad una distanza $d = 2m$ è posta una massa m. Calcolare il coefficiente di attrito statico per cui essa rimane in quiete rispetto alla piattaforma.

– Nel sistema rotante avremo:



$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_T$$

con v (velocità assoluta) $= (2gh)^{1/2}$

v_T (velocità di trascinamento) $= \omega R$

$$\bar{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2\bar{\omega} \wedge (\bar{v} - \bar{v}_T) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} - 2\vec{\omega} \wedge \bar{v}_T$$

$2\bar{\omega} \wedge \bar{v} = 0$ essendo $\vec{v} \parallel \vec{\omega}$ per cui:

$$\bar{a}_c = -2\bar{\omega} \wedge \bar{v}_T \Rightarrow a_c = 2\omega^2 R = 2\,m/sec^2$$

Inoltre:

$$\vec{a}' = \bar{a} - \bar{a}_T - \bar{a}_c = g - \omega \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{R}) + 2\bar{\omega} \wedge \vec{v}_T$$
$$= \vec{g} + \omega^2 \vec{R}$$

$$a = (g^2 + \omega^4 R^2)^{1/2} = 9.86\ m/sec^2$$

– Nel sistema inerziale R, la massa m ruota con moto circolare uniforme soggetta alla forza centripeta $a = \mu g$.

Nel sistema R' solidale con la piattaforma essa è in quiete per cui: $a' = 0$; $a_c = 0$. Avremo allora

$$\bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_T - \bar{a}_c \Rightarrow a = a_T$$

$$\mu g = \omega^2 R \Rightarrow \mu = \frac{\omega^2 R}{g} = 0.46$$