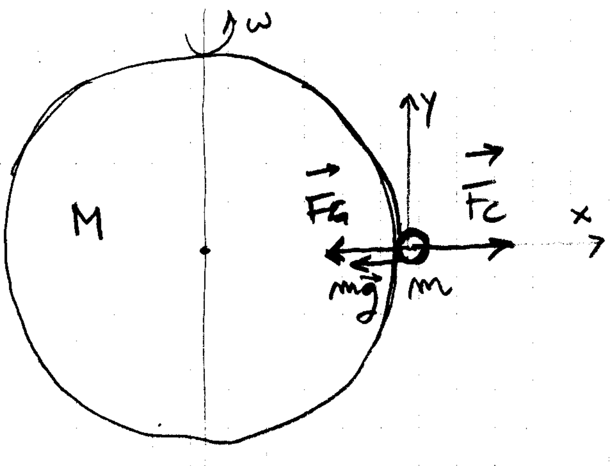
Esercizio

Che durata dovrebbero avere i giorni sulla Terra affinché i corpi all'equatore non pesassero nulla? ($R_T = 6{,}4 \cdot 10^6 m$)

Soluzione

Nel sistema di riferimento non inerziale sulla Terra un corpo fermo all'equatore sarà soggetto alla forza di gravità con cui la Terra lo attira ed alla forza centrifuga dovuta alla rotazione del corpo insieme alla Terra.



Osserviamo che nelle condizioni di rotazione ordinarie della Terra la forza peso $m\vec{g}$ è proprio la risultante della forza di attrazione terrestre

$$F_G = G\frac{mM}{R_T^2}$$

e la forza centrifuga

$$F_C = m\omega_0^2 R_T^2$$

ovvero

$$-mg\hat{r} = -G\frac{mM}{R_T^2}\hat{r} + m\omega_0^2 R_T\hat{r}$$

con $\hat{r}$ versore che parte dal centro della Terra punta all'esterno. In forma scalare con l'asse x concorde con $\hat{r}$

$$-mg = -\frac{GmM}{R_T^2} + m\omega_0^2 R_T \quad \text{quindi}$$

$$g = +\frac{GM}{R_T^2} - \omega_0^2 R_T \qquad (1)$$

con ω_0 velocità angolare normale della Terra

Quindi affinché il corpo non pesi nulla il primo ed il secondo termine a secondo membro dovrebbero avere lo stesso valore. Da questa condizione troviamo ω

$$\omega = \left(\frac{GM}{R_T^3}\right)^{1/2}$$

Il prodotto GM possiamo trovarlo dalla (1)

$$GM = \omega_0^2 R_T^3 + g R_T^2 \quad \text{quindi}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R_T^3}\left(\omega_0^2 R_T^3 + g R_T^2\right) = \omega_0^2 + g/R_T$$

ma $T = \frac{2\pi}{\omega}$ allora

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{1}{\omega_0^2 + g/R_T}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$$

velocità angolare "normale" della Terra

$$T = \frac{2\pi}{\left[\omega_0^2 + g/R_T\right]^{1/2}} = \frac{2\pi}{\left[(7{,}27 \cdot 10^{-5})^2 + 9{,}81 / \underbrace{6{,}4 \cdot 10^{6}}_{\text{raggio terrestre}}\right]^{1/2}} = 5{,}07 \cdot 10^{3} \text{ sec}$$

ovvero

$$T = 84 \text{ min} = 1\text{h}\ 24'$$