Esercizio

Una massa $m = 1{,}0\,kg$ è attaccata ad una molla di costante elastica $K = 2{,}0\ N/m$ e striscia senza attrito su un piano orizzontale. La lunghezza a riposo della molla è pari a $l = 20\ cm$. Se si sposta la massa di $\Delta l = 3{,}0\ cm$ dalla posizione di equilibrio, calcolare:

1) l'ampiezza massima delle oscillazioni
2) in che posizione e quale valore assume la velocità massima
3) che lavoro fa la forza di richiamo quando la massa si sposta dalla posizione di equilibrio alla massima ampiezza
4) che velocità iniziale si dovrebbe dare alla massa affinché l'ampiezza delle oscillazioni fosse di $d = 10\ cm$

Soluzione

1) Se il corpo striscia senza attrito, questo unirà un moto oscillatorio infinito che risponde alla

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{K/m}$$

dove A è l'ampiezza dell'oscillazione e φ la fase. Entrambi i valori possono essere dedotti dalle condizioni iniziali attraverso

$$x(0) = \Delta l$$
$$v(0) = 0$$

ma dalla precedente eq. si ha $v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ ed inoltre

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi = \Delta l \\ v(0) = A\omega\,\mathrm{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda deduco che $\mathrm{sen}\varphi = 0$ ovvero $\varphi = 0$ e quindi

$$A = \Delta l = 3{,}0\ \mathrm{cm} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

2) Abbiamo già ottenuto

$$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

che ha valore max quando

$$\mathrm{sen}\,\omega t = 1 \longrightarrow \omega t = \pi/2$$

ovvero

$$x_{v_{max}} = A\cos\pi/2 = 0$$

nella posizione di equilibrio, e

$$v_{max} = A\omega = A\sqrt{K/m} = 3{,}0\cdot 10^{-2}\cdot(2{,}0/1{,}0)^{1/2} = 4{,}2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/sec}$$

3) $$dL = \vec{F}_{EL}\cdot\vec{dx} = -Kx\,dx$$

$$L = \int_0^A -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^A = -\frac{1}{2}kA^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\,2{,}0\cdot(3{,}0\cdot 10^{-2})^2 = 9{,}0\cdot 10^{-4}\ J$$

4) Torniamo all'equazione che descrive il moto oscillatorio e consideriamo le nuove condizioni iniziali

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

con
$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi = 3{,}0\,cm = 0{,}03\,m \\ v(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = v_{IN} \end{cases}$$

ed imponendo che $A = 10\,cm = 0{,}1\,m$.
Quindi dalla 1ª

$$\cos\varphi = \frac{x(0)}{A}$$

e dalla 2ª

$$v_{IN} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = -A\omega\left(1 - \frac{x^2(0)}{A^2}\right)^{1/2} =$$

$$= -\left[\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2(0)\right)\right]^{1/2} = -\left[\frac{2{,}0}{1{,}0}\left(0{,}1^2 - 0{,}03^2\right)\right]^{1/2} =$$

$$= -0{,}13\ m/sec$$