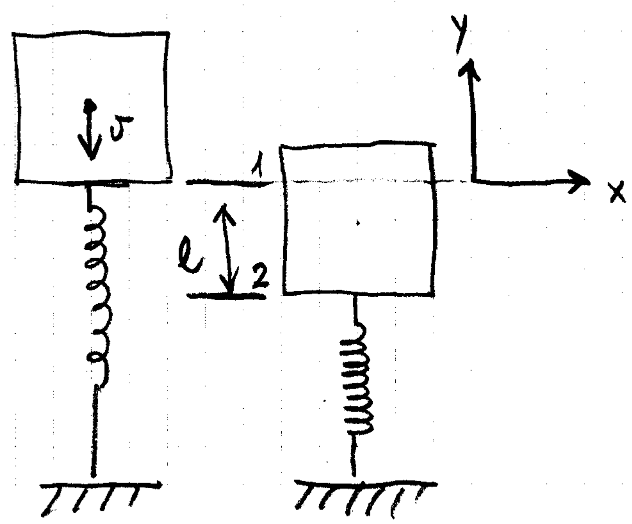
Esercizio

Un ascensore di massa $m = 2000\,kg$ con i cavi di sospensione spezzati cade con una velocità $v = 25\ m/sec$ quando arriva ad urtare una molla alla fine della sua corsa.
Si suppone che la molla riesca a fermare l'ascensore quando questa si comprime per $l = 3{,}0\ m$. Durante il moto un freno di sicurezza applica una forza d'attrito costante $F = 17000\ N$ all'ascensore (anche con ascensore fermo)
Come progettista di impianti di sicurezza ti viene chiesto di determinare:

1) la costante elastica che dovrebbe avere la molla
2) qual'è la energia potenziale elastica immagazzinata nella molla alla massima compressione
3) se l'ascensore "rimbalza" sulla molla o rimane fermo in discesa ed, in caso di "rimbalzo", qual'è la massima altezza raggiunta dall'ascensore partendo dalla posizione di riposo della molla.

Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento come in figura



Applichiamo il Teorema delle forze vive che ci dice

$$L_{TOT} = T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = -\frac{1}{2}\, 2000 \cdot 25^2 =$$

$$= -625000 \text{ J}$$

ovvero le forze esterne compiono un lavoro negativo sull'ascensore. Valutando le forze in gioco possiamo scrivere

$$L_{TOT} = L_G + L_{EL} + L_F$$

con i contributi dovuti alla forza di gravità alla forza elastica e di attrito rispettivamente.

$$L_G = -\Delta U = U_1 - U_2 = 0 - mg(-\ell) = mg\ell =$$

$$= 2000 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}0 = 58860 \text{ J}$$

$$L_{EL} = \int_0^{-\ell} -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{-\ell} = -\frac{1}{2}k\ell^2$$

$$L_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = -17000 \cdot 3{,}0 = -51000 \text{ J}$$

Quindi

$$L_{EL} = (T_2 - T_1) - L_G - L_F \quad \text{da cui}$$

$$k = \frac{2}{\ell^2}\left[L_G + L_F - (T_2 - T_1)\right] = \frac{2}{3{,}0^2}\Big[58860 +$$

$$+ (-51000) - (-62500)\Big] = 1{,}41 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

2) Siccome

$$L_{EL} = -\Delta U_{EL} = U_{1EL} - U_{2EL}$$

allora

$$U_{2EL} = U_{1EL} - L_{EL} = 0 - \left(-\frac{1}{2}k\ell^2\right) = \frac{1}{2}k\ell^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1{,}41 \cdot 10^5 \cdot 3{,}0^2 = 634500 \text{ J}$$

3) Valutiamo il diagramma delle forze nella posizione di compressione max della molla

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{EL} + m\vec{g} + \vec{F}_A = -k(x - x_0) - mg - F_A =$$

$$= -1{,}41 \cdot 10^5 (-3{,}0 - 0) - 2000 \cdot 9{,}81 - 17000 = 386380 \text{ N}$$

positiva e quindi diretta verso l'alto. Quindi l'ascensore verrà spinto verso l'alto.
Per valutare a quale altezza arriva l'ascensore dobbiamo calcolare con che energia cinetica "lascia" la molla.

$$L_{TOT} = T_2 - T_1$$

$$L_{TOT} = L_{EL} + L_G + L_F$$

$$L_{EL} = -\Delta U_{EL} = U_{2EL} - U_{1EL} = 634500 \text{ J}$$

$$L_G = -58860 \text{ J}$$ (forza e spostamento discordi)

$$L_F = -51000 \text{ J}$$ (forza e spostamento discordi)

$$T_2 = L_{TOT} + T_1 = L_{TOT} = L_{EL} + L_G + L_F =$$

$$= 634500 - 58860 - 51000 = 524640 \text{ J}$$

Rapplichiamo di nuovo il Teorema delle forze vive dopo che l'ascensore ha "lasciato" la molla

$$L_{TOT} = T_3 - T_2 \qquad \text{con } T_3 = \emptyset$$

$$L_{TOT} = L_G + L_F$$

$$L_G = -mgh \quad (\text{forza e spostamento discordi})$$

$$L_F = -F \cdot h \quad (\text{forza e spostamento discordi})$$

$$T_3 - T_2 = -mgh - F \cdot h$$

$$h = \frac{T_2}{mg + F} = \frac{524600}{2000 \cdot 9{,}81 + 17000} = 14{,}3 \text{ m}$$