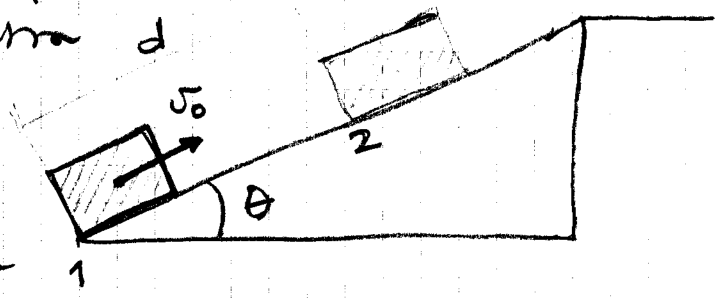
Esercizio

Una cassa di massa $m = 12$ kg giace sul pavimento. Vogliamo caricarla su un camion facendola strisciare verso l'alto su di un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Senza considerare la forza di attrito, calcoliamo che la cassa d possa raggiungere il piano del camion imprimendo alla cassa una velocità iniziale di $v_0 = 5{,}0$ m/sec. Essendo la forza d'attrito non trascurabile la cassa striscia sul piano inclinato per una lunghezza $d = 1{,}6$ m si ferma e torna indietro.



1) Assumendo che la forza d'attrito sia costante, trovare quanto vale
2) Qual è la velocità della cassa quando torna nel punto di partenza

Soluzione

1) Siccome il problema non richiede informazioni "temporali" del sistema, ovvero posizioni e/o velocità in funzione del tempo, proviamo ad applicare considerazioni energetiche. Sappiamo che la forza di attrito è una forza non conservativa. Questo significa che

l'energia totale meccanica del sistema $E = T + U$ non si conserva.
Però possiamo sempre applicare il teorema delle forze vive che ci dice

$$L_{1,2} = \Delta T = T_2 - T_1$$

ovvero che il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti sul sistema, allorchè questo si sposta dal punto 1 al punto 2, è uguale alla differenza dell'energia cinetica che il sistema possiede in 2 meno quella che possiede in 1. Ricordiamo che tale teorema viene ricavato applicando esclusivamente la legge di Newton e pertanto vale per qualunque forza applicata sul sistema (conservativa e/o non conservativa)!!
Le forze in gioco nel sistema sono la forza gravitazionale e la forza di attrito ed il loro lavoro complessivamente sarà pari a

$$L = -\Delta U + L_{attrito} \qquad \text{ovvero}$$

$$L_{1,2} = U_1 - U_2 + (-F_{att} \cdot d)$$

il segno meno fra parentesi è dovuto al fatto che

$$L_{att} = \vec{F}_{att} \times \vec{d} = -F_{att} \cdot d$$

siccome i vettori $\vec{F}_{att}$ e $\vec{d}$ hanno versi discordi.
Combinando il teorema delle forze vive e l'espressione che lega il lavoro alle forze

in gioco (gravitazionale e di attrito) si ottiene

$$(1) \quad T_2 - T_1 = U_1 - U_2 - F_{att} \cdot d \qquad \text{oppure}$$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 + F_{att} \cdot d$$

$$E_1 = E_2 + F_{att} \cdot d$$

che esprime il seguente concetto: il lavoro fatto dalle forze non gravitazionali è pari alla variazione dell'energia meccanica del sistema $E = T + U$.

Dalla (1) possiamo ricavare la F_{att}

$$F_{att} = \frac{U_1 - U_2 - T_2 + T_1}{d} = \frac{1}{d}\left[-mgd \operatorname{sen}\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} m v_0^2\right] = \frac{1}{1{,}6}\left[-12 \times 9{,}81 \times 1{,}6 \times \operatorname{sen} 30° + \frac{1}{2} \times 12 \times 5{,}0^2\right] =$$

$$= 34{,}9 \text{ N}$$

2) Per trovare la velocità finale della cassa (che non è pari a quella iniziale in virtù della presenza di forze non conservative!!) è sufficiente aggiornare la (1) con le nuove posizioni iniziale e finale (ora chiamiamola 3 invece di 1 per non confonderci).

$$T_3 - T_2 = U_2 - U_3 - F_{att} \cdot d$$

Il segno davanti il terzo termine a secondo membro è sempre meno siccome la Fatt è sempre opposto al movimento. Quindi

$$T_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 = U_2 - U_3 - F_{att} \cdot d + T_2$$

$$v_3 = \left\{ \frac{2}{m} \left[mg\, d \,\text{sen}\, \theta - F_{att} \cdot d \right] \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{12} \left[12 \times 9{,}81 \times 1{,}6 \,\text{sen}\, 30^\circ - 34{,}9 \times 1{,}6 \right] \right\}^{1/2} = 2{,}5 \text{ m/sec}$$