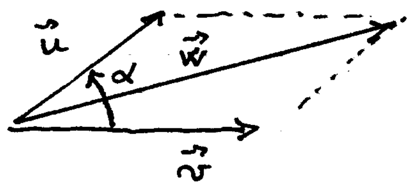
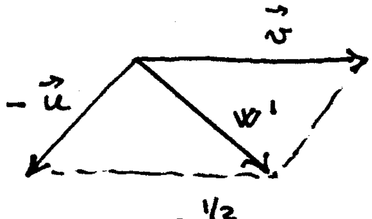
CALCOLO VETTORIALE

1) SOMMA - DIFFERENZA TRA VETTORI

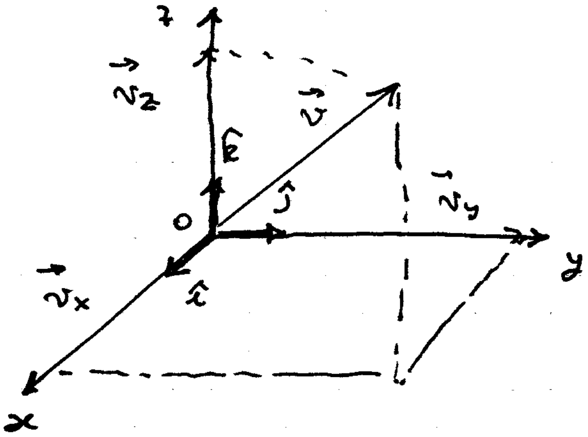
$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \vec{w}\,' = \vec{v} - \vec{u}$$





$$w = \left(u^2 + v^2 \pm 2uv\cos\alpha\right)^{1/2}$$

2) COMPONENTI DI UN VETTORE



$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \quad \text{(COMPONENTI)}$$
$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

(LE COMPONENTI)

$$\begin{cases} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\cos\beta \\ v_z = v\cos\gamma \end{cases}$$

COSENI DIRETTORI

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

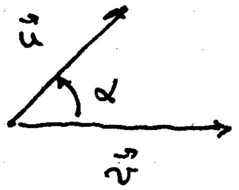
3) PRODOTTO TRA VETTORI

a) Prodotto scalare per un vettore ⇒ VETTORE

$$\vec{w} = a\vec{v}$$

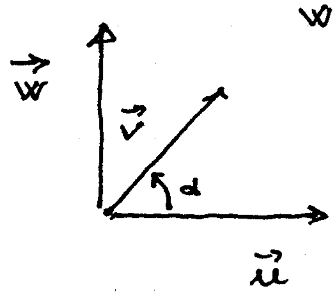
b) Prodotto <u>scalare</u> di due vettori ⇒ SCALARE

$$a = \vec{v} \times \vec{u} = vu\cos\alpha$$
$$= v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$



c) Prodotto <u>vettoriale</u> tra due vettori $\Rightarrow$ VETTORE

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$



$w = u\, v \,\mathrm{sen}\,\alpha$

(AREA del PARALLELOGRAMMA)

$$w = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{w}_x = \hat{i}\,(u_y v_z - u_z v_y) \\ \vec{w}_y = \hat{j}\,(u_z v_x - u_x v_z) \\ \vec{w}_z = \hat{k}\,(u_x v_y - u_y v_x) \end{cases}$$

d) Prodotto <u>misto</u> tra tre vettori $\Rightarrow$ SCALARE

$$Q = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w} \qquad \text{(VOLUME PARALLELEPIPEDO)}$$

<u>CAMPO</u> : grandezza funzione delle coordinate indipendente del sistema di riferimento

CAMPI SCALARI

CAMPI VETTORIALI

<u>OPERATORE</u> : simbolo di un'operazione che si effettua su una funzione o su un vettore

$$A f = g$$

<u>OPERATORI DIFFERENZIALI</u> : operazioni di derivazione totale o parziale su funzioni scalari o vettoriali

1) OPERATORE GRADIENTE : grad , $\vec{\nabla}$

Applicato ad una funzione scalare $\rightarrow$ <u>vettore</u>

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

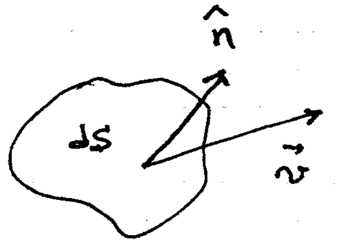
$$V_x = \partial f/\partial x \; ; \quad V_y = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \quad V_z = \partial f/\partial z$$

2) OPERATORE DIVERGENZA : div

Applicato ad un vettore → scalare

$$f = \mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

FLUSSO : $\Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \times \hat{n}\, dS$



TEOREMA della DIVERGENZA

$$\Phi_S(\vec{v}) = \oint_S \vec{v} \times \hat{n}\, dS = \int_V \mathrm{div}\,\vec{v}\, dV$$

VETTORI SOLENOIDALI : $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

3) OPERATORE LAPLACIANO : Δ

Operatore scalare applicato ad una funzione

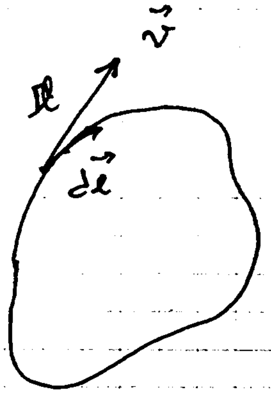
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

4) OPERATORE ROTORE

Applicato ad un vettore → vettore

$$\vec{w} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

CIRCUITAZIONE DI UN VETTORE



$$\Gamma = \oint_l \vec{v} \times d\vec{l}$$

l = linea chiusa

TEOREMA DI STOKES o della CIRCUITAZIONE

$$\Gamma = \oint_l \vec{v} \times d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{v} \times \hat{n}\, dS$$

TRASFORMAZIONI : 1) FISICA : ogni fenomeno che produce una variazione del sistema fisico considerato

2) MATEMATICA : corrispondenza biunivoca funzionale tra una variabile x ed una x'.

$$x' = f(x) \qquad x' = \hat{T} x$$

$\hat{T} a = a$ $\quad$ a grandezza <u>invariante</u> per $\hat{T}$

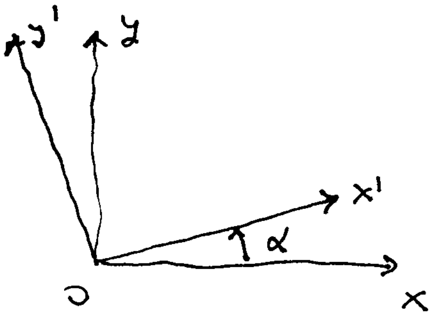
$\hat{T}\left[y = f(x)\right] \Rightarrow y = f(x)$ $\quad$ equazione f invariante per $\hat{T}$

$\hat{T}\left[y = f(x)\right] \Rightarrow y' = f'(x')$ $\quad$ se $f = f'$ l'equazione è <u>covariante</u> per $\hat{T}$

TRASFORMAZIONI GLOBALI : operano identicamente su tutti i punti dello spazio

a) TRASLAZIONI $\quad \hat{T} \vec{v} = \vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{a}$

b) ROTAZIONI



$$\vec{v}' = \hat{T} v \quad \text{con } T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) INVERSIONE DI PARITÀ